## 1 Généralités

**Définition 1**

Une partie $A$ de $E$ est un *sous-espace affine* s'il existe : •  •

**Exemple 1** — Dans $\mathbb{R}^2$, montrer que l'ensemble $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 4\right\}$ est un sous espace affine.

**Exemple 2** — Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$ est un sous espace affine.

**Théorème 1**

Si $A = a + F$ est un sous-espace affine, alors :

**Exercice 1** — Démontrer la proposition précédente.

- **Remarque.** Soient $A$ et $A'$ deux sous-espaces affines de directions $F$ et $F'$. On peut alors montrer que :
• ou bien $A \cap A' = \varnothing$.  • ou bien $A \cap A' \neq \varnothing$ est un sous-espace affine de direction $F \cap F'$.

## 2 Ensembles solutions d'une équation linéaire

- **Notion d'équation linéaire.** Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $b \in F$. On s'intéresse à l'équation $f(x) = b$ d'inconnue $x \in E$.

**Exemple 3** — Montrer que le système de l'exemple **??** peut s'écrire comme une équation linéaire.

**Exemple 4** *Solutions de $y' + ay = b$* — On suppose données $a, b : I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Montrer que l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$ peut s'écrire comme une équation linéaire.

**Théorème 2**

- Si $b \notin \operatorname{Im} f$,
-

**Exercice 2** — Démontrer ce théorème.

**Exemple 5** — Montrer que : $A = \left\{f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}) \mid f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f(1) = 2\right\}$ et un sous-espace affine.

**Exemple 6** — Trouver l'ensemble $\mathcal{S}$ des suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n - 4$.

**Exemple 7** *Retour sur l'interpolation* — On donne $n$ réels distincts $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ et $n$ valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$.
Donner tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ P(x_k) = y_k$.

**Exemple 8** — Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $P_n \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que : $P_n(0) = 0$ et $P_n(X+1) - P_n(X) = X^n$.

**Exemple 9** — On pose $A = \left\{f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}) \mid f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f(1) = 2\right\}$. Calculer : $\inf\limits_{f \in A} \int_0^1 (f^2 + f'^2)$.

## 3 Traduction matricielle : solutions d'un système linéaire

- **Cadre.** Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On considère le système linéaire : $(S) : \quad AX = B$.

**Théorème 3**

Si $(S)$ est compatible et si $X_0$ est une solution, l'ensemble des solutions de $(S)$ est :

- **Conséquence.** Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si $(S)$ a une unique solution, alors $A$ est inversible ($\operatorname{Ker} A = \{0\}$)

**Théorème 4 : Système homogène**

L'ensemble des solution de $AX = 0$ est le sev :

**Exercice 3** — Démontrer le résultat sur la dimension de $\operatorname{Ker} A$.