IV Sommes doubles

- **Objectif.** Calculer une « somme de sommes » *i.e.* une somme S de la forme $S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}$ aussi notée $\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} a_{i,j}$.

SF 4 : Intervertir des symboles $\sum$

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} a_{i,j} =$$

- **Explication.** La somme S peut être vue comme la somme des termes d'un tableau rectangulaire. Elle peut être calculée en commençant par sommer sur les lignes ou bien en commençant par sommer sur les colonnes

- **D'abord sur les lignes.**

$$\begin{array}{c|cccc|l}
 & j=1 & j=2 & \dots & j=p & \\
i=1 & a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} & \rightsquigarrow \sum_{j=1}^{p} a_{1,j} \\
i=2 & a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} & \rightsquigarrow \sum_{j=1}^{p} a_{2,j} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
i=n & a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} & \rightsquigarrow \sum_{j=1}^{p} a_{n,j}
\end{array} \Bigg\} S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}$$

- **D'abord sur les colonnes.**

$$\begin{array}{c|cccc}
 & j=1 & j=2 & \dots & j=p \\
i=1 & a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\
i=2 & a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
i=n & a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \\
 & \wr & \wr & & \wr \\
 & \sum_{i=1}^{n} a_{i,1} & \sum_{i=1}^{n} a_{i,2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{i,p}
\end{array}$$

$$S = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$$

Exemple 1 — Calculer : **a)** $S_1 = \sum_{1\leq i,j\leq n} i$. **b)** $S_2 = \sum_{1\leq i,j\leq n} (i+j)$. **c)** $S_3 = \sum_{0\leq i,j\leq n} 2^{2i-j}$.

SF 4 : Intervertir des symboles $\sum$ dans une somme double

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j} = \qquad\qquad \sum_{1\leq i<j\leq n} a_{i,j} =$$

- **En commençant par les lignes.**

$$\begin{array}{c|cccc|l}
 & j=1 & j=2 & \dots & j=n & \\
i=1 & a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & \rightsquigarrow \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} \\
i=2 & & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & \rightsquigarrow \sum_{j=2}^{n} a_{2,j} \\
\vdots & & & & \vdots & \\
i=n & & & & a_{n,n} & \rightsquigarrow \sum_{j=n}^{n} a_{n,j}
\end{array} \Bigg\} S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}$$

- **En commençant par les colonnes.**

$$\begin{array}{c|cccc}
 & j=1 & j=2 & \dots & j=n \\
i=1 & a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\
i=2 & & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\
\vdots & & & & \vdots \\
i=n & & & & a_{n,p} \\
 & \wr & \wr & & \wr \\
 & \sum_{i=1}^{1} a_{i,1} & \sum_{i=1}^{2} a_{i,2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{i,n}
\end{array}$$

$$S = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}$$

Exemple 2 — Calculer : **a)** $S_1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{1}{j}$. **b)** $S_2 = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} i$.