III Applications aux sommes doubles

1 Théorème de Fubini et produits de sommes

Théorème 1 : Fubini

Soit $(u_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille sommable de complexes.

Les familles $\left(\sum_{j\in J} u_{ij}\right)_{i\in I}$ et $\left(\sum_{i\in I} u_{ij}\right)_{j\in I}$ sont sommables et :

Exercice 1 — Démontrer le théorème de Fubini à l'aide du théorème de sommation par paquets

Exemple 1 SF 4 — Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $|z| < 1$. Etablir : $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{z^{2p-1}}{1-z^{2p-1}} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{z^p}{1-z^{2p}}$.

Théorème 2 : Familles « produits »

Soit $(u_i)_{i\in I}, (v_j)_{j\in J}$ des familles sommables de complexes.

La famille $\left(u_i v_j\right)_{(i,j)\in I\times J}$ est elle aussi sommable et :

Exercice 2 — Démontrer ce théorème à l'aide du théorème de Fubini.

- **Remarque.** Le résultat se généralise par récurrence au produit d'un nombre fini de familles sommables.

Exemple 2 SF 5 — On note I l'ensemble des entiers naturels non nuls n'ayant aucun diviseur premier autre que 2, 3 ou 5. Pour tout $n \in I$, on pose : $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. Justifier l'existence et calculer : $\displaystyle\sum_{n\in I} a_n$.

2 Produit de Cauchy

Théorème 3

Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries de nombres complexes absolument convergentes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

La série $\sum c_n$ est absolument convergente et :

- **Vocabulaire.** La série $\sum c_n$ est appelée *produit de Cauchy* des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$.

Exercice 3 — Démontrer le théorème.

Exemple 3 SF 8 — Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Montrer que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}$

Exemple 4 SF 8 — Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a+b)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^n}{n!}$

Attention Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ ne sont pas absolument convergentes, alors la série $\sum c_n$ peut diverger.

Exemple 5 — On pose $a_n = b_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Etudier la convergence de $\sum a_n$ $\sum b_n$ et $\sum c_n$