II Familles sommables de nombres complexes

1 Sommabilité d'une famille de complexes

- **Cadre.** • $(u_i)_{i\in I}$ est une famille de nombres complexes

Définition 1

On dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est *sommable* lorsque :

On note $\ell_1(I)$ l'ensemble des familles sommables de $\mathbb{C}^I$

- **Cas des séries.** Pour $I = \mathbb{N}$: Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est sommable ssi

- **Remarques:**
  - Toute sous-famille d'une famille sommable est encore sommable.
  - Si $(v_i)_{i\in I}$ est une famille sommable de $[0,+\infty]$ telle que $|u_i| \leq v_i$ pour tout $i \in I$, alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable.

SF 1 : vérifier si une famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable

Il suffit de : *i)* Calculer $\sum_{i\in I} |u_i|$ dans $[0,+\infty]$ (où « tout est permis ») *ii)* Vérifier si le résultat est fini.

Exemple 1 SF 1 SF 3 — Soient $z \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Les familles ci-dessous sont-elles sommables ?

a) $\left(\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)_{n\geq 1}$ **b)** $\left(\dfrac{\sin(p+q)}{p^2q^2}\right)_{p,q\geq 1}$ **c)** $(z^{ij})_{i,j\geq 1}$ **d)** $\left(\dfrac{1}{n^2-p^2}\right)_{\substack{n,p\geq 1\\ n\neq p}}$

2 Somme d'une famille sommable de complexes

- **Cadre.** • $(u_i)_{i\in I}$ est une famille sommable de nombres complexe • On souhaite définir la somme $\sum_{i\in I} u_i$

- **Cas d'une famille de réels.**

- **Cas d'une famille de complexes.**

Exercice 1 — Justifier dans chacun des deux cas que le nombre $\sum_{i\in I} u_i$ est bien défini.

3 Propriétés des familles sommables

- **Cadre.** • $(u_i)_{i\in I}, (v_i)_{i\in I}$ sont des familles sommables de nombres complexes • λ, μ sont des complexes.

Théorème 1 : Opérations

• *Linéarité.* La famille $(\lambda u_i + \mu v_i)_{i\in I}$ est sommable et :

• *Inégalité triangulaire.*

• *Invariance par permutation.* $(u_{\sigma(i)})_{i\in I}$ est sommable pour toute permutation σ de I et :

Exercice 2 — Démontrer le théorème.

- **Conséquence.** $\ell_1(I)$ est :

Théorème 2 : Sommation par paquets (admis)

Soit $(I_k)_{k\in K}$ un recouvrement disjoint de I. La famille $\left(\sum_{i\in I_k} u_i\right)_{k\in K}$ est sommable et :

SF 2 : Justifier la sommabilité ET calculer la somme d'une famille de complexes

Exemple 2 SF 2 — Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2^n}$

Théorème 3 : Approximation par des sommes finies

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie J de I telle que :

Exercice 3 — Démontrer le théorème dans le cas où $(u_i)_{i\in I}$ est une famille de réels.