## 3 Démonstration de l'existence du morphisme signature

- **Cadre.** • $n$ est un entier naturel non nul. • On pose : $T = \left\{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \mid i<j\right\}$.

**Définition 1**

Pour tout $\sigma \in S_n$, on pose : $\varepsilon(\sigma) = \dfrac{\displaystyle\prod_{(i,j)\in T}\big(\sigma(j)-\sigma(i)\big)}{\displaystyle\prod_{(i,j)\in T}(j-i)}$

- **Interprétation en termes d'inversions.** Soit $\sigma \in S_n$.

On dit qu'un couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i<j$ présente une *inversion* si : $\sigma(i) > \sigma(j)$.

**Exemple 1** — Pour $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, les couples $(1,3)$, $(1,4)$, $(2,3)$, $(2,4)$ et $(3,4)$ présentent des inversions. [a]

[a]. On peut se représenter une inversion en interprétant $\sigma$ comme le résultat d'une course : le coureur au dossard 1 parti en premier est arrivé en 3e position, le coureur au dossard 2, parti second, est arrivé 4e... Il y a une inversion lorsque deux coureurs se sont doublés. Ainsi le dossard 3, arrivé 2e, a doublé le dossard 1, parti avant lui mais arrivé 3e : le couple $(1,3)$ présente une inversion pour $\sigma$ .

- **Lien entre signature et inversions.**

On note $\mu_\sigma$ l'application de $T$ dans $T$ définie pour tout $(i,j)\in T$ par : $\begin{cases} \mu_\sigma(i,j) = \big(\sigma(i),\sigma(j)\big) & \text{si } \sigma(i)<\sigma(j) \\ \mu_\sigma(i,j) = \big(\sigma(j),\sigma(i)\big) & \text{si } \sigma(i)>\sigma(j) \end{cases}$

L'application $\mu_\sigma$ est bijective (c'est une injection de $T$ dans lui-même) donc le changement d'indice $(k,\ell) = \mu_\sigma(i,j)$ dans le produit donne : $\displaystyle\prod_{(i,j)\in T}\big(\sigma(j)-\sigma(i)\big) = \prod_{(k,\ell)\in T} \pm(\ell-k)$ où $\pm = (-1)$ ssi $\sigma$ présente une inversion en $(i,j)$.

En conséquence : $\displaystyle\prod_{(i,j)\in T}\big(\sigma(j)-\sigma(i)\big) = (-1)^N \prod_{(k,\ell)\in T}(\ell-k)$ où $N$ est le nombre d'inversions.

En divisant par $\displaystyle\prod_{(i,j)\in T}(j-i)$ il reste : $\varepsilon(\sigma) = (-1)^N$.

Ainsi : Pour toute permutation $\sigma \in S_n$ : $\varepsilon(\sigma) = (-1)^N$ où $N$ est le nombre d'inversions de $\sigma$

**Démonstration de ce que $\varepsilon$ est un morphisme de groupes.**

Soient $\sigma,\sigma' \in S_n$. Montrons que : $\varepsilon(\sigma'\circ\sigma) = \varepsilon(\sigma')\times\varepsilon(\sigma)$.

Par définition de la signature puis en utilisant le changement d'indice $(k,\ell) = \mu_\sigma(i,j)$ comme-ci-dessus :

$$\varepsilon(\sigma'\circ\sigma) = \prod_{(i,j)\in T}\frac{\sigma'\big(\sigma(j)\big)-\sigma'\big(\sigma(i)\big)}{j-i} = \prod_{(i,j)\in T}\frac{\sigma'\big(\sigma(j)\big)-\sigma'\big(\sigma(i)\big)}{\sigma(j)-\sigma(i)} \times \prod_{(i,j)\in T}\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i} = \underbrace{\prod_{(k,\ell)\in T}\frac{\sigma'(\ell)-\sigma'(k)}{\ell-k}}_{=\varepsilon(\sigma')} \times \underbrace{\prod_{(i,j)\in T}\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}}_{=\varepsilon(\sigma)}$$

**Démonstration de ce que $\varepsilon$ envoie toute transposition sur $-1$.**

Soit $\tau = (k,\ell) \in S_n$ une transposition avec $k<\ell$. Montrons que $\varepsilon(\tau) = (-1)$.

Au vu du lien avec le nombre d'inversions, il s'agit de montrer que $\tau$ présente un nombre impair d'inversions.

Comptons le nombre d'inversions de $\tau$ *i.e.* le nombre de couples $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tels que $i<j$ et $\tau(i)>\tau(j)$.

Soit $(i,j)$ tel que $1 \le i < j \le n$ :

- Si $i \ne k$ et $j \ne \ell$, alors : $\big(\tau(i),\tau(j)\big) = (i,j)$ et $\sigma$ ne présente pas d'inversion en $(i,j)$.
- Si $i = k$ et $j = \ell$, alors : $\big(\tau(k),\tau(\ell)\big) = (\ell,k)$ et $\sigma$ présente une inversion en $(i,j)$.
- Si $i = k$ et $j \in [\![k+1,n]\!]\setminus\{\ell\}$, alors : $\big(\tau(k),\tau(j)\big) = (\ell,j)$
  donc $(k,j)$ présente une inversion ssi : $\ell > j$ *i.e.* ssi : $j \in [\![k+1,\ell-1]\!]$, il y a $\ell-k-1$ tels couples.
- Si $j = \ell$ et $i \in [\![1,\ell-1]\!]\setminus\{k\}$, alors : $\big(\tau(i),\tau(\ell)\big) = (i,k)$
  donc $(i,\ell)$ présente une inversion ssi : $i>k$, *i.e.* ssi : $i \in [\![k+1,\ell-1]\!]$, il y a $\ell-k-1$ tels couples.

Le nombre $N$ d'inversions de $\sigma$ est donc : $N = 2(\ell-k-1)+1$.

Puisque $N$ est impair : $\varepsilon(\sigma) = (-1)^N = -1$.