Lois usuelles

Nom	$X(\Omega)$	Loi de X	$E(X)$	$V(X)$
$\mathscr{B}(p)$	$\{0,1\}$	$P(X=1)=p$	p	$p(1-p)$
$\mathscr{B}(n,p)$	$[\![0,n]\!]$	$\forall k\in[\![0,n]\!],\ P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
$\mathscr{U}([\![1,n]\!])$	$[\![1,n]\!]$	$\forall k\in[\![1,n]\!],\quad P(X=k)=\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$

SF 1 Déterminer la loi d'une v.a.r. X

- *Option 1 : avec la définition*

1. On détermine $X(\Omega)$ *i.e.* l'ensembles des valeurs que prend X.
2. On calcule les probabilités $P(X=k)$ pour $k\in X(\Omega)$.

- *Option 1 bis : Variante lorsque X est définie comme un min ou un max*

1. On détermine $X(\Omega)$ *i.e.* l'ensembles des valeurs que prend X.
2. On calcule les probabilités $P(X\leq k)$ (pour un max) ou $P(X\geq k)$ (pour un min)
3. On utilise : $P(X=k)=P(X\leq k)-P(X\leq k-1)$ ou $P(X=k)=P(X\geq k)-P(X\geq k+1)$

- *Option 2 : on reconnaît une loi usuelle :* on justifie de quelle loi il s'agit (binomiale, de Bernoulli, ou uniforme) et on donne les paramètres correspondants.

SF 2 Calculer l'espérance d'une v.a.r. X

- *Option 1 : avec la loi de X*
  i) On détermine la loi de X. *ii)* On utilise la définition $E(X)=\sum_{k\in X(\Omega)} kP(X=k)$.
- *Option 2 : avec les propriétés de l'espérance*
  - *Linéarité :* $E(aX_1+bX_2)$ et en particulier : $E(aX_1+b)=aE(X_1)+b$
  - Lorsque $X=X_1X_2$ avec X_1 et X_2 indépendantes $E(X)=E(X_1)E(X_2)$.
    (sans l'indépendance : $E(X_1X_2)=\sum_{i\in X_1(\Omega)}\sum_{j\in X_2(\Omega)} ijP(\{X_1=i\}\cap\{X_2=j\})$.)
- *Option 3 : avec la formule de transfert.* Lorsque $X=f(Y)$ où la loi de Y est connue, la formule de transfert donne $E(X)=E(f(Y))=\sum_{k\in Y(\Omega)} f(k)P(Y=k)$
- *Option 4 : avec une loi usuelle.* Dans ce cas $E(X)$ est connue sans calcul.
- *Option 5 : avec des d'indicatrices.* Si X compte le nombre d'événements A_i réalisés pour $1\leq i\leq n$ on peut écrire $X=\mathbb{1}_{A_1}+\cdots+\mathbb{1}_{A_n}$ et calculer $E(X)$ par linéarité.

SF 3 Calculer la variance d'une v.a.r. X

- *Option 1 : avec Koenig-Huygens et la formule de Transfert*
  - La formule de Koenig-Huygens donne : $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$.
  - On peut utiliser la formule de transfert pour calculer $E(X^2)$
- *Option 2 : avec les propriétés de la variance.*
  - Lorsque $X=aY+b$ on peut utiliser $V(X)=a^2V(Y)$.
  - Lorsque $X=X_1+X_2$ avec X_1 et X_2 indépendantes $V(X)=V(X_1)+V(X_2)$.
    (sans l'indépendance on a $V(X_1+X_2)=V(X_1)+V(X_2)+2\operatorname{cov}(X_1,X_2)$.)
- *Option 3 : avec une loi usuelle.* Dans ce cas $V(X)$ est connue sans calcul.

SF 4 Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $\{X=i\}$

Il suffit de calculer les $P_{\{X=i\}}(Y=j)$ pour tous les $j\in Y(\Omega)$:

- On suppose $\{X=i\}$ réalisé
- Pour $j\in Y(\Omega)$, on calcule la probabilité de l'événement $\{Y=j\}$ sachant $\{X=i\}$.

SF 5 Déterminer la loi de $Z=X+Y$

- Avec les probabilités totales : $P(Z=k)=\sum_{i\in X(\Omega)} P_{\{X=i\}}(Y=k-i)P(X=i)$
- Reste à calculer les probabilités $P_{\{X=i\}}(Y=k-i)$:
  - *Si X et Y sont indépendantes :* $P_{\{X=i\}}(Y=k-i)=P(Y=k-i)$.
  - Sinon on calcule la probabilité de $\{Y=k-i\}$ sachant $\{X=i\}$.

SF 6 Déterminer la loi conjointe de X et Y :

i) On trouve $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ *ii)* On calcule les $P\big(\{X=i\}\cap\{Y=j\}\big)$ pour $i\in X(\Omega), j\in Y(\Omega)$

SF 7 Déterminer les lois marginales à partir de la loi conjointe

- Pour la loi de X : $P(X=i)=\sum_{j\in Y(\Omega)} P(\{X=i\}\cap\{Y=j\})$, pour tout $i\in X(\Omega)$.
- Pour la loi de Y : $P(Y=j)=\sum_{i\in X(\Omega)} P(\{X=i\}\cap\{Y=j\})$ pour tout $j\in Y(\Omega)$.

SF 8 Déterminer la loi de $Z=\max(X,Y)$ ou de $Z=\min(X,Y)$

Il peut être utile d'utiliser l'option 1 bis ci-dessus avec :

- Si $Z=\max(X,Y)$: $\{Z\leq k\}=\{X\leq k\}\cap\{Y\leq k\}$
- Si $Z=\min(X,Y)$: $\{Z\geq k\}=\{X\geq k\}\cap\{Y\geq k\}$

SF 9 Calculer la covariance d'un couple (X,Y)

- *Option 1 :* On utilise : $\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$
- *Option 2 : si X et Y sont indépendantes :* $\operatorname{cov}(X,Y)=0$.
- *Option 3 : avec les variances (polarisation)* $\operatorname{cov}(X,Y)=\frac{1}{2}\big(V(X+Y)-V(X)-V(Y)\big)$.

SF 10 Montrer que X et Y sont indépendantes

On vérifie que **pour tous** $i\in X(\Omega)$ et $j\in Y(\Omega)$: $P(\{X=i\}\cap\{Y=j\})=P(X=i)P(Y=j)$

SF 11 Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes

- *Option 1 :* On trouve **un i et un j** tels que $P(\{X=i\}\cap\{Y=j\})\neq P(X=i)P(Y=j)$.
- *Option 2 :* On montre que $\operatorname{cov}(X,Y)\neq 0$.

SF 12 Appliquer astucieusement l'inégalité de Markov

Pour établir $P(X\geq a)\leq \frac{M}{\alpha}$ on transforme $\{X\geq a\}$ en $\{f(X)\geq\alpha\}$ où $E(f(X))=M$

SF 13 Quand appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Elle permet de montrer une inégalité de la forme : $P(|\ldots|\geq\varepsilon)\leq\frac{\ldots}{\varepsilon^2}$