SF 1 Calculer le terme général d'une suite arithmético-géométrique

1. On introduit l'unique $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\alpha = a\alpha + b$.
2. La suite v de terme général $v_n = u_n - \alpha$ est géométrique de raison a.
3. *En calculant α*, on en déduit une expression de $u_n = v_n + \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

SF 2 Calculer le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2

1. On résout l'équation caractéristique : $(\mathscr{C}) : \quad \lambda^2 - a\lambda - b = 0$.
2. On applique les formules du cours selon la valeur du discriminant de $(\mathscr{C})$. Par exemple dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:
   - si $(\mathscr{C})$ a deux racines réelles distinctes λ_1 et λ_2, il existe $A, B \in \mathbb{R}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$
   - si $(\mathscr{C})$ a une racine double $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, il existe $A, B \in \mathbb{R}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n = (A + nB)\lambda_0^n$
   - si $(\mathscr{C})$ a deux racines non réelles conjuguées $\lambda_1 = re^{i\theta}$ et $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$, alors il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n = r^n(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta))$
3. On détermine A et B à l'aide de la donnée de deux valeurs, par exemple u_0 et u_1.

SF 3 Majorer/Minorer une somme $u_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

Une possibilité est de :

1. majorer « l'intérieur » *i.e.* chercher un encadrement de a_k lorsque $0 \leq k \leq n$.
2. puis sommer les inégalités obtenues sur a_k pour k allant de 0 à n.

SF 4 Montrer qu'une suite est croissante

- On peut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+1} - u_n \geq 0$.
- Si $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, peut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.

SF 5 Lever une forme indéterminée

- On peut factoriser par le terme prépondérant.
- On peut utiliser la quantité conjuguée avec des racines carrées

SF 6 Montrer que (u_n) converge SANS déterminer sa limite

Penser au théorème de la limite monotone (qui ne donne pas la valeur de la limite)

SF 7 Montrer que (u_n) converge ET déterminer sa limite

- Procéder par opérations ou utiliser le produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle
- Encadrer u_n pour appliquer le théorème d'encadrement
- On revient à la définition de la limite « avec les ε »

SF 8 Montrer que u et v sont adjacentes

On applique la définition ce qui nécessite :

- de montrer que $u_n - v_n \to 0$.
- d'étudier la monotonie de u (souvent via le signe de $u_{n+1} - u_n$)
- d'étudier la monotonie de v (souvent via le signe de $v_{n+1} - v_n$)

SF 9 Prouver qu'une suite (u_n) n'a pas de limite

Il suffit de trouver deux sous-suites de u qui possèdent des limites différentes.

SF 10 Utiliser les sous-suites pour prouver que (u_n) a une limite

On montre que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers une même limite.

SF 11 Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$: quelques pistes

- *Etudier les variations de f.* Lorsque f est croissante sur un intervalle stable par f, la suite (u_n) est monotone (pas forcément croissante)
- *Etudier le signe de $g : x \mapsto f(x) - x$.*
  - Les zéros de g sont les points fixes de f (candidats limites si f est continue)
- *Etudier la limite de (u_n) lorsque f est croissante.* On montre que :
  1. (u_n) est à termes dans un intervalle où g est de signe constant
  2. (u_n) est monotone (croissante ou décroissante selon le signe de g).
  3. (u_n) a une limite (avec le théorème de la limite monotone)

SF 12 Etudier une suite implicite *i.e.* x_n est la solution de $f_n(x_n) = 0$

- L'existence découle de l'application du théorème de la bijection à la fonction f_n.
- Pour la monotonie on peut chercher le signe de $f_{n+1}(x_n)$ puis utiliser le fait que $0 = f_{n+1}(x_{n+1})$
- Pour le calcul de la limite on fait tendre n vers $+\infty$ dans la relation $f_n(x_n) = 0$.

SF 13 Montrer que $M = \sup A$

On commence par montrer que M majore A puis :

- *Méthode 1.* On construit une suite (a_n) d'éléments de A telle que $a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} M$.
- *Méthode 2.* On montre que M est *le plus petit* des majorants de A par exemple :
  - En fixant un autre majorant M' de A et en montrant que $M' \geq M$
  - En supposant par l'absurde qu'il existe un majorant M' de A tel que $M' < M$ et en dégageant une contradiction.

SF 14 Utiliser les suites pour montrer/exploiter la densité de A dans $\mathbb{R}$

On utilise le fait que A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe une suite (a_n) d'éléments de A telle que $a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$.