SF 1 Effectuer le changement d'indice « $j=\varphi(i)$ » dans la somme $\sum_{i\in I} a_i$

- On exprime a_i en fonction de j
- On change les bornes en utilisant la relation $j=\varphi(i)$.

SF 2 Calculer une somme en utilisant des sommes connues

On essaie de faire apparaître des sommes de l'une des formes suivantes :

- Les sommes $\sum_{k=1}^{n} k$ ou $\sum_{k=1}^{n} k^2$
- Une somme géométrique
- Une somme binomiale

SF 3 Calculer une somme en utilisant un télescopage

- On essaie d'écrire l'expression à sommer sous la forme $a_{k+1}-a_k$.
- Il ne reste que la différence des termes extrêmes par exemple :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k+1}-a_k = a_{n+1}-a_1 \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{k-1}-a_k = a_0-a_n.$$

- Cette technique s'applique aussi aux produits de termes de la forme $\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$.

SF 4 Intervertir des symboles $\sum$ dans une somme double

- Si les bornes ne dépendent pas des indices on peut intervertir sans se poser de questions : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}$
- Si les bornes dépendent des indices les choses sont un peu plus délicates, par exemple : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}$ et $\displaystyle\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}$

SF 5 Majorer une somme $\sum_{k=1}^{n} a_k$

Une possibilité est de :

1. majorer « l'intérieur » *i.e.* chercher à majorer a_k.
2. puis sommer les inégalités obtenues sur a_k pour k allant de 1 à n.

SF 6 Calcul de somme par dérivation

On essaie de voir la somme à calculer comme la dérivée d'une somme connue évaluée en un point bien choisi.

Formulaire

Sommes des puissances

- ♥ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Sommes géométriques

- ♥ Si $q\neq 1$: $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} q^k = \frac{q^m-q^{n+1}}{1-q}$
- Si $q=1$: $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} q^k = n-m+1$

Identités remarquables

- ♥ $\displaystyle a^n-b^n=(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$
- $\displaystyle (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Sommes triangulaires

- ♥ $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}$
- $\displaystyle\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}$

Coefficients binomiaux

- *Définition :* $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
- *Symétrie :* $\displaystyle\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
- ♥ *Formule de Pascal :* $\displaystyle\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$
- *Formule « sans nom » :* $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$
- *Valeurs remarquables*
  - $\displaystyle\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$
  - $\displaystyle\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$
  - $\displaystyle\binom{n}{2}=\binom{n}{n-2}=\frac{n(n-1)}{2}$