Etude de la sommabilité

SF 1 Vérifier si une famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable

- On calcule $\sum_{i\in I}|u_i|$. Ce calcul s'effectue dans $[0,+\infty]$ où « tout est permis » : théorème de Fubini, sommation par paquets ...
- On vérifie si $\sum_{i\in I}|u_i|<+\infty$ par exemple en essayant :
  - de calculer explicitement $\sum_{i\in I}|u_i|$ (*via* une série géométrique ou de Riemann).
  - dans le cas d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vérifier que la série à termes positifs $\sum|u_n|$ est convergente par critères de comparaisons (équivalent, majoration ...)

SF 2 Justifier la sommabilité ET calculer la somme de $(u_i)\in\mathbb{C}^I$

- On commence calculer **formellement** la somme $\sum_{i\in I}u_i$, par exemple en utilisant le théorème de Fubini ou une sommation par paquets
- On justifie ensuite la légitimité du calcul mené formellement montrant que $\sum_{i\in I}|u_i|<+\infty$ (à l'aide des mêmes théorèmes, ou par les techniques du SF 1).

SF 3 Utiliser une sous-famille

Si on trouve une sous-famille non sommable de $(u_i)_{i\in I}$, alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas non plus sommable.

Calcul de somme : théorème de Fubini et sommation par paquets

SF 4 Utiliser le théorème de Fubini pour calculer des sommes

Si la famille $(u_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ vérifie l'une des deux conditions suivantes :

- Les $u_{i,j}$ sont des réels **positifs**

ou

- La famille $(u_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ est une famille **sommable** de complexes

Alors on peut écrire : $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J}u_{ij}=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}u_{ij}=\sum_{j\in J}\sum_{i\in I}u_{ij}$

SF 5 Calculer des produits de sommes

Si les familles $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_j)_{j\in J}$ vérifie l'une des deux conditions suivantes :

- Les u_i et les v_j sont des réels **positifs**

ou

- Les familles $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_j)_{j\in J}$ sont des familles **sommables** de complexes

Alors on peut écrire : $\displaystyle\sum_{i\in I}u_i\times\sum_{j\in J}v_j=\sum_{(i,j)\in I\times J}u_iv_j$.

On enchaîne souvent avec une sommation par paquets en « découpant » $I\times J$

SF 6 En pratique : intervertir des sommes « triangulaires »

Dans le cas d'une famille sommable (ou de réels positifs) de la forme $(u_{k,n})_{\substack{k,n\in\mathbb{N}^*\\ k\leq n}}$

on peut écrire : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty}u_{k,n}\underset{①}{=}\sum_{\substack{k,n\in\mathbb{N}^*\\ k\leq n}}u_{k,n}\underset{②}{=}\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}u_{k,n}$.

Il s'agit du théorème de sommation par paquets en utilisant deux partitions de l'ensemble $T=\{(k,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*\ |\ k\leq n\}$:

- ① découle de : $T=\bigcup_{k\geq1}I_k$ où pour tout $k\in\mathbb{N}^*$: $I_k=\{(k,n)\ ;\ n\geq k\}$
- ② découle de : $T=\bigcup_{n\geq1}J_n$ où pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $J_n=\{(k,n)\ ;\ k\in[\![1,n]\!]\}$

SF 7 En pratique : sommer à « $p+q$ constant »

Dans le cas d'une famille sommable (ou de réels positifs) de la forme $(u_{p,q})_{p,q\in\mathbb{N}}$

on peut « poser $(p,q)=(k,n-k)$ » *i.e.* écrire : $\displaystyle\sum_{p,q\in\mathbb{N}}u_{p,q}=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}u_{k,n-k}$.

Il s'agit du théorème de sommation par paquets en utilisant : $\mathbb{N}\times\mathbb{N}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}D_k$

où pour tout $k\in\mathbb{N}^*$: $D_n=\{(k,n-k)\ ;\ k\in[\![0,n]\!]\}$

Produit de Cauchy

SF 8 Utiliser un produit de Cauchy pour calculer $\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\right)\times\left(\sum_{n=0}^{+\infty}b_n\right)$

Lorsque les deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes :

- La série de terme général $c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$ est absolument convergente
- Le produit est donné par : $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\right)\times\left(\sum_{n=0}^{+\infty}b_n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n$

SF 9 Utiliser un produit de Cauchy pour calculer $\sum_{n=0}^{+\infty}c_n$

Si l'on peut écrire $c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$ où $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes :

- La série $\sum c_n$ est alors elle aussi absolument convergente
- Sa somme est donnée par : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}c_n=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\right)\times\left(\sum_{n=0}^{+\infty}b_n\right)$