SF 1 — Montrer que $\sum u_n$ converge ET déterminer sa somme

- *Option 1* On fait apparaître un télescopage.
- *Option 2* On fait apparaître une somme géométrique ou une série exponentielle.
- *Option 3* On fait apparaître une intégrale.

SF 2 — Lignes directrices pour étudier la nature de $\sum u_n$

1. On vérifie que $\lim u_n = 0$ (sinon il y a divergence grossière).
2. Si u_n est de signe constant :
   - On peut utiliser les critères de comparaisons pour comparer u_n au terme général d'une série de référence.
   - On peut utiliser une comparaison série-intégrale.
3. Si u_n n'est pas de signe constant :
   - on peut reconnaître une série alternée.
   - on peut se ramener au cas positif en étudiant la convergence absolue.
4. En cas de non convergence absolue ou si u_n est « compliqué » : on utilise les DL.

SF 3 — Etudier la nature d'une série alternée $\sum (-1)^n a_n$

La convergence de $\sum (-1)^n a_n$ est assurée si : • $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ • (a_n) est décroissante.

Dans ce cas, le théorème des séries alternées fournit aussi une estimation de $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: • $|R_n| \leq a_{n+1}$ • R_n est du signe de $(-1)^{n+1}$.

SF 4 — Etudier la nature de $\sum u_n$ à l'aide des critères de comparaisons

On compare u_n au terme général d'une série de référence :

- **Pour une série à termes positifs :** en cherchant un équivalent de u_n.
- **Pour une série à termes positifs :** en majorant ou en minorant u_n.
- **Pour une série quelconque :** En cherchant $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

SF 5 — Nature de $\sum u_n$ lorsque u_n a un exposant qui dépend de n

- On revient à l'exponentielle : $u_n = e^{v_n}$.
- Si $\lim v_n \neq -\infty$: il y a divergence grossière.
- Si $\lim v_n = -\infty$, on peut essayer de montrer que $n^2 u_n \to 0$:
  - On revient à l'exponentielle : $n^2 u_n = e^{2\ln n + v_n} = e^{w_n}$.
  - Montrer que $n^2 u_n \to 0$ revient à montrer que $w_n \to -\infty$.

SF 6 — Utiliser les DL pour prouver la convergence de $\sum u_n$

On découpe u_n en morceaux plus simples à étudier, :

- Typiquement des termes du types $\frac{(-1)^n}{n^\beta}$ avec $\beta > 0$ (séries alternées).
- On choisit l'ordre de façon à obtenir un $O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ avec $\alpha > 1$ (en général [a])

a. Précisément, l'ordre dépend de ce que le dernier terme est de signe constant ou alterné :

- Si : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \dots + \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}_{v_n} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)}_{w_n}$ où $\alpha > 0$ et $\beta > 1$ alors $\begin{cases} \sum v_n \text{ converge} & \text{(th. des séries alternées)} \\ \sum w_n \text{ converge} & \text{(domination)} \end{cases}$
- Si : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \dots + \underbrace{\frac{1}{n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)}_{v_n}$ où $0 < \alpha < \beta$ alors $v_n \sim \frac{1}{n^\alpha}$ et $\sum v_n$ est de même nature que $\sum \frac{1}{n^\alpha}$

SF 7 — Effectuer une comparaison série-intégrale

La technique s'applique pour étudier la série $\sum f(k)$ où $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ décroît :

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on peut écrire : $\forall t \in [k, k+1], \quad f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$.
2. Par croissance de l'intégrale pour tout $k \in \mathbb{N}$: $f(k+1) \underset{(2)}{\leq} \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,dt \underset{(1)}{\leq} f(k)$
3. La sommation de ces inégalités permet ainsi de majorer ou minorer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k)$.

SF 8 — Montrer que $\sum f(k)$ converge par comparaison série-intégrale

1. On somme (2) pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ puis on ajoute $f(0)$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k) \leq f(0) + \int_0^n f(t)\,dt$
2. On calcule $\displaystyle\int_0^n f(t)\,dt$ et on la majore par une constante
3. La série à termes positifs est majorée donc convergente.

SF 9 — Montrer que $\sum f(k)$ diverge par comparaison série-intégrale

1. On somme (1) pour $k \in [\![0, n]\!]$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k) \geq \int_0^{n+1} f(t)\,dt$
2. On calcule $I_n = \displaystyle\int_0^n f(t)\,dt$ et on montre que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
3. La suite (S_n) des sommes partielles diverge par le théorème de minoration (relatif aux suites)

SF 10 — Pour obtenir un encadrement de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$

1. On fixe $N \geq n+1$ et on somme (2) pour $k \in [\![n, N-1]\!]$ et (1) pour $k \in [\![n+1, N]\!]$
2. On effectue un passage aux limites dans l'encadrement lorsque $N \to +\infty$.