Primitives et intégrales

SF 1 – Calculer une primitive au moyen d'une intégrale

On utilise le théorème fondamental de l'analyse :

- Lorsque f est continue sur I, pour $a \in I$ fixé, la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de f.
- On est ramené à calculer l'intégrale $\int_a^x f(t)\,dt$.

SF 2 – Calculer une primitive

On dispose essentiellement de trois options

- *Option 1 :* le calcul direct si l'on reconnaît une forme $u' \times (f \circ u)$ ou l'une des trois formes listées dans la partie **Méthodes directes**.
- *Option 2 :* on utilise une intégration par parties.
- *Option 3 :* on utilise un changement de variable.

Méthodes directes

SF 3 – Primitiver $u' \times (f \circ u)$

On utilise le tableau des primitives usuelles.

SF 4 – Primitiver une fonction de la forme $x \mapsto \cos^p x \sin^q x$

On linéarise $\cos^p t \sin^q t$ puis on primitive les morceaux.

SF 5 – Primitiver les fonctions de la forme $x \mapsto e^{ax} \cos bx$ et $x \mapsto e^{ax} \sin bx$

On utilise les nombres complexes :

- On écrit $e^{ax} \cos bx = \mathrm{Re}(e^{(a+ib)x})$;
- Une primitive de $x \mapsto e^{(a+ib)x}$ est $x \mapsto \dfrac{e^{(a+ib)x}}{a+ib}$;
- On prend la partie réelle : $\mathrm{Re}\left(\dfrac{e^{a+ibx}}{a+ib}\right) = \dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}\mathrm{Re}\Big((\cos bx + i \sin bx)(a-ib)\Big) = \ldots$

SF 6 – Primitiver $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$ lorsque $b^2 - 4ac > 0$

- On factorise le trinôme : $ax^2 + bx + c = a(x-r_1)(x-r_2)$
- Par le « cache » on trouve $A, B \in \mathbb{R}$ telles que $\dfrac{1}{a(x-r_1)(x-r_2)} = \dfrac{A}{x-r_1} + \dfrac{B}{x-r_2}$
- On primitive les deux morceaux (avec des ln)

SF 7 – Primitiver $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$ lorsque $b^2 - 4ac = 0$

- On factorise le trinôme : $ax^2 + bx + c = a(x-r)^2$
- Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{(x-r)^2}$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{x-r}$.

SF 8 – Primitiver $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$ lorsque $b^2 - 4ac < 0$

- On écrit $ax^2 + bx + c$ sous forme canonique $ax^2 + bx + c = a[(x+\alpha)^2 + \beta^2)]$ (avec $\alpha = \frac{b}{2a}$ et $\beta^2 = -\frac{\Delta}{4a^2}$ mais peu importe ...)
- On utilise le fait que $x \mapsto \dfrac{1}{(x+\alpha)^2+\beta^2}$ est la dérivée de $x \mapsto \dfrac{1}{\beta}\mathrm{Arctan}\,\dfrac{x+\alpha}{\beta}$

Techniques d'intégration pour la recherche de primitives

SF 9 – Effectuer une intégration par parties sur $\int_a^b f(t)g(t)\,dt$

- On primitive une des deux fonctions f ou g et on dérive l'autre $\int_a^b \underset{F}{\underset{\downarrow}{f}}\,\underset{g'}{\underset{\downarrow}{g}}$
- On applique la formule du cours
- On est ramené à calculer $\int_a^b F(t)g'(t)\,dt$

SF 10 – Calculer $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ en posant $x = \varphi(t)$

- On calcule $\dfrac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ et $dx = \varphi'(t)\,dt$ puis on isole $\varphi'(t)\,dt$ dans l'intégrale.
- On effectue trois remplacements :
  1. on remplace $f(\varphi(t))$ par $f(x)$;
  2. on remplace $\varphi'(t)\,dt$ par dx ;
  3. on remplace les bornes a et b en *calculant* leurs images $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$.

SF 11 – Calculer $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ en posant $x = \varphi(t)$

- On calcule $\dfrac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ et $dx = \varphi'(t)\,dt$
- On effectue trois remplacements :
  1. on remplace $f(x)$ par $f(\varphi(t))$;
  2. on remplace dx par $\varphi'(t)\,dt$;
  3. on remplace les bornes α et β en *cherchant* a et b tels que $\varphi(a) = \alpha$ et $\varphi(b) = \beta$.