SF 1 — Vérifier qu'une application est un produit scalaire

- Symétrie : on vérifie que : $(x \mid y) = (y \mid x)$ pour tous $x, y \in E$.
- Linéarité par rapport à la première variable :
  « On fixe $y \in E$. Soient $x, x' \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $(\lambda x + \mu x' \mid y) = \dots = \lambda (x \mid y) + \mu (x' \mid y)$ »
  Par symétrie, $(\cdot \mid \cdot)$ est aussi linéaire par rapport à la seconde variable.
- Positivité. Pour tout $x \in E$, on montre que : $(x \mid x) \geq 0$.
- Séparation. *C'est en général le point délicat qui nécessite un argument théorique.*
  On suppose que : $(x \mid x) = 0$. On montre que cela impose : $x = 0_E$.

SF 2 — Exploiter la bilinéarité pour calculer des produits scalaires

Si : $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i$ sont combinaisons linéaires de certains vecteurs $u_1, \dots, u_n \in E$: • $(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j \left(u_i \mid u_j\right)$ • $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \left(u_i \mid u_j\right)$

SF 3 — Utiliser les identités remarquables

- *Identités remarquables.*
  - $\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \pm 2 (x \mid y)$
  - $\|x\|^2 - \|y\|^2 = (x + y \mid x - y)$
- *Formule de polarisation :* $(x \mid y) = \frac{1}{2}\left(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$

SF 4 — Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour établir des inégalités

- *Pour majorer un produit scalaire (abstrait) :* $\left|(x \mid y)\right| \leq \|x\| \, \|y\|$
- *Pour majorer/minorer une somme :* $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$
- *Pour majorer/minorer une intégrale :* $\left(\int_a^b f(t) g(t) \, \mathrm{d}t\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(t)^2 \, \mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b g(t)^2 \, \mathrm{d}t\right)$

SF 5 — Montrer qu'une famille $(u_i)_{i \in I}$ est orthonormale

On vérifie que • Pour $i \neq j$: $\left(u_i \mid u_j\right) = 0$ • Pour tout $i \in I$: $\|u_i\|^2 = (u_i \mid u_i) = 1$

SF 6 — Calculer en base orthonormée

Si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E et si $x, y \in E$:

- Les *coordonnées* de x dans $\mathscr{B}$ sont $\big((x \mid e_1), \dots, (x \mid e_n)\big)$: $x = \sum_{i=1}^{n} (x \mid e_i) e_i$
- *Produits scalaires et norme.* • $(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} (x \mid e_i)(y \mid e_i)$ • $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x \mid e_i)^2$

SF 7 — Déterminer $F^\perp$ lorsque F est un sous-e.v. de dimension finie

- On écrit F sous forme de « Vect » : $F = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$.
- On obtient des équations caractérisant $F^\perp$. Pour $x \in E$: $x \in F^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} (x \mid u_1) & = 0 \\ \quad \vdots & \\ \left(x \mid u_p\right) & = 0 \end{cases}$
- On écrit $F^\perp$ sous forme de « Vect » en résolvant le système.

SF 8 — Montrer que $G = F^\perp$ lorsque F est un sous-e.v. de dimension finie

- *Si E est de dimension finie.* Procéder par inclusion-dimension :
  - Montrer que $G \subset F^\perp$. Fixer $x \in G$ puis montrer que : $\forall a \in F, \quad (x \mid a) = 0$
  - Montrer que : $\dim G = \dim E - \dim F$.
- *Si E est de dimension infinie.* Procéder par double-inclusion.
  - L'inclusion $G \subset F^\perp$ se montre de même
  - Pour montrer $F^\perp \subset G$, on peut montrer que G est un supplémentaire de F.
    Etant donné $x \in F^\perp$, on est alors assuré que $x \in G$ car :
    - $x = y + z$ pour certains $y \in F$ et $z \in G \subset F^\perp$ • $y = x - z$ donc $y \in F \cap F^\perp = \{0_E\}$

SF 9 — Calculer le projeté orthogonal de x sur un sous-e.v. F

- Méthode 1 : calcul « à vue »
  Si on arrive à écrire : $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^\perp$. Alors : $p_F(x) = y$.
- Méthode 2 : avec une base quelconque de F.
  On dispose d'une base $(e_1, \dots, e_p)$ non orthonormée de F.
  On traduit les deux conditions : 1. $p_F(x) \in F$ 2. $x - p_F(x) \in F^\perp$.
  1. permet d'écrire : $p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i$ avec des α_i à trouver.
  2. donne les équations vérifiées par les α_i : $\left(x - p_F(x) \mid e_j\right) = 0$ pour $j \in [\![1, p]\!]$
- Méthode 3 : en base orthonormée
  Si on dispose d'une base *orthonormée* $(e_1, \dots, e_p)$ de F, alors : $p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (x \mid e_i) e_i$

SF 10 — Calculer le projeté orthogonal de x sur un hyperplan H

1. On trouve un vecteur normal *i.e.* un vecteur a non nul de $H^\perp$
2. On applique la formule : $p_H(x) = x - \frac{(x \mid a)}{\|a\|^2} a$.

SF 11 — Calculer la distance de x à un sous-espace vectoriel F

1. On calcule le projeté orthogonal $p_F(x)$ de x sur F
2. On applique la formule : $\mathrm{d}(x, F) = \|x - p_F(x)\|$

SF 12 — Calculer la distance de x à un hyperplan H

1. On trouve un vecteur normal *i.e.* un vecteur a non nul de $H^\perp$
2. On applique la formule : $\mathrm{d}(x, H) = \frac{|(x \mid a)|}{\|a\|}$.