SF 1 — Résoudre une équation polynomiale

On procède par analyse-synthèse. Pour l'analyse si P est un candidat solution :

- On peut s'intéresser au degré de P.
- On peut s'intéresser au coefficient dominant de P (ou à la valeur d'un autre coefficient particulier de P).
- On peut évaluer l'équation en des valeurs bien choisies afin de montrer que P coïncide avec un polynôme simple en une infinité de valeurs.
- On peut s'intéresser aux racines complexes de P et à leurs multiplicités pour essayer de déterminer la forme factorisée de P sur $\mathbb{C}[X]$.

SF 2 — Calculer le reste de la division euclidienne de A par B

- On écrit $A = BQ + R$ avec R à trouver tel que $\deg R < \deg B$.
- On évalue en les racines de B.

SF 3 — Montrer que Q divise P

- *Option 1 : à l'aide des racines.* On factorise Q et on montre que toutes les racines **complexes** de Q sont racines de P (et que leurs multiplicités dans P sont au moins égales à leurs multiplicités dans Q).
- *Option 2 : avec la définition.* On parvient à mettre Q en facteur dans P.
- *Option 3 : à l'aide de la D.E.* On montre que le reste de la D.E. de P par Q est nul.

SF 4 — Déterminer la multiplicité d'une racine

Pour montrer que a est racine de P de multiplicité m

- *En évaluant :* on montre que $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$.
- *En factorisant :* on montre que $P = (X-a)^m Q$ où $Q(a) \neq 0$.

En présence d'une dérivée se rappeler que a est de multiplicité $m-1$ dans P'.

SF 5 — Résoudre un système d'équations non-linéaires

On peut utiliser les relations entre coefficients et racines : les inconnues sont les racines d'un polynôme que l'on obtient à partir du second membre du système.

SF 6 — Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$

Si $n = \deg P \geq 1$, on cherche ses n racines $z_1, \ldots, z_n$ (comptées avec multiplicité).

On peut alors écrire : $P = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X - z_i)$ où λ est le coefficient dominant de P

SF 7 — Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$

- *Option 1*
  1. On factorise P dans $\mathbb{C}[X]$
  2. On regroupe les facteurs conjugués : $(X-\alpha)(X-\overline{\alpha}) = X^2 - 2\operatorname{Re}\alpha + |\alpha|^2$
- *Option 2 (aussi possible pour factoriser dans $\mathbb{C}[X]$)*
  1. On cherche une (ou des) racine a de P ainsi que sa multiplicité m.
  2. On factorise par $(X-a)^m$ en effectuant la division de P par $(X-a)^m$.

SF 8 — Etablir une égalité polynomiale $P(X) = Q(X)$ en « dés-évaluant »

On peut assurer que $R = P - Q$ est le polynôme nul en montrant que : $P(a) = Q(a)$ pour « trop » de valeurs $a \in \mathbb{K}$ (typiquement une infinité mais $n+1$ suffisent si on sait que P et Q sont de degré inférieur à n).

SF 9 — Calculer un PGCD de P et Q

- *Option 1 : avec l'algorithme d'Euclide.* On effectue une suite de division euclidiennes : $A \wedge B$ est associé au dernier reste non-nul fourni par l'algorithme.
- *Option 2 : avec la décomposition en facteurs irréductibles.* Dans le cas où A et B sont décomposés en facteurs irréductibles il suffit de conserver les facteurs communs.

SF 10 — Calculer une relation de Bézout entre P et Q

On « remonte » l'algorithme d'Euclide en « renversant » les divisions euclidiennes.

SF 11 — Décomposer une fraction $F \in \mathbb{K}(X)$ en élément simples

1. On calcule sa partie entière par une division euclidienne (elle est nulle si $\deg F < 0$)
2. On factorise le dénominateur pour trouver les pôles et leurs multiplicités.
3. On écrit la décomposition en éléments simples avec des coefficients indéterminés.
4. On calcule les coefficients (avec les techniques ci-dessous)

SF 12 — Calculer les coefficients de la décomposition en éléments simples

- *Méthode du « cache ».* Si a est pôle d'ordre m, le coefficient de $\dfrac{1}{(X-a)^m}$ s'obtient en mutlipliant par $(X-a)^m$ puis en évaluant en a.
- *Méthode $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x)$.* Lorsque $\deg F < 0$, le calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x)$ fournit une relation entre certains des coefficients.
- *Evaluer en des points particulier* (qui ne sont pas des pôles)

SF 13 — Décomposer en élément simple une fraction de la forme $\frac{P'}{P}$.

On utilise la formule du cours qui donne cette décomposition sans calcul.

SF 14 — Primitiver une fraction rationnelle $F \in \mathbb{R}(X)$

On décompose F en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$, on primitive les « morceaux » :

- Un polynôme (partie entière)
- Des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{(x-a)^k} = (x-a)^{-k}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$ dont une primitive est
  - Si $k = 1$: $x \mapsto \ln|x-a|$
  - Si $k \geq 2$: $x \mapsto \dfrac{1}{(-k+1)(x-a)^{k-1}}$.
- Des fonctions $x \mapsto \dfrac{ax+b}{x^2+px+q}$ avec $p^2 - 4q < 0$, pour cela :
  - *i)* On fait apparaître la forme « $\dfrac{u'}{u}$ » *i.e.* on fait apparaître $u'(x) = 2x + p$ au numérateur (factoriser par $\frac{a}{2}$ puis ajouter et retrancher p)
  - *ii)* Le terme restant se primitive à l'aide d'un arctangente (en mettant le dénominateur sous forme canonique)