SF 1 Calculer les puissances d'une matrice carrée A

- *Option 1 : par récurrence.* On calcule les premières puissances de A jusqu'à pouvoir conjecturer une expression de A^p en fonction de p puis démontrer cette formule par récurrence.
- *Option 2 : avec la formule du binôme.* On écrit A sous la forme $A = B + C$ où :
  - Les matrices B et C commutent.
  - Les puissances de B et C sont « simples » à calculer.
- *Option 3 : à l'aide d'un polynôme annulateur.* Si $P(A) = 0$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$:
  - On calcule le reste R de la D.E. de X^n par P : $X^n = P(X)Q(X) + R(X)$.
  - En évaluant la D.E. en A, on obtient : $A^n = P(A)Q(A) + R(A) = R(A)$.
- *Option 4 : à l'aide d'une relation de similitude.* Si $A = PDP^{-1}$ où D est diagonale et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ alors on montre par récurrence sur p que $A^p = PD^pP^{-1}$.

SF 2 Calculer l'inverse d'une matrice carrée A

- *Option 1 : par l'algorithme du pivot.*
  - On transforme A en I_n par des opérations élémentaires sur les lignes de A.
  - On effectue en parallèle les mêmes opérations sur I_n : elles transforment I_n en A^{-1}.
- *Option 2 : avec la définition.* On exhibe une matrice B telle que $AB = I_n$ (ou $BA = I_n$). Cela prouve que A est inversible et que $B = A^{-1}$. Cette option est par exemple envisageable lorsque l'on dispose d'un polynôme annulateur de A.
- *Option 3 : en taille $(2,2)$.* On utilise la formule du cours : $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$ et dans ce cas : $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

SF 3 Utiliser les suites de matrices colonnes du type $X_{n+1} = AX_n$

Dans le cas de deux suites u et v vérifiant une relation du type $\begin{cases} u_{n+1} = au_n + cv_n \\ v_{n+1} = bu_n + dv_n \end{cases}$

- Posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, la relation de récurrence s'écrit $X_{n+1} = AX_n$.
- On en déduit par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_{n+1} = A^n X_0$.
- Le calcul de A^n permet d'exprimer u_n et v_n en fonction de n.