SF 1 Effectuer une intégration par parties sur $\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$

- On primitive une des deux fonctions f ou g et on dérive l'autre $\int_a^b \underset{F}{\underset{\downarrow}{f}}\,\underset{g'}{\underset{\downarrow}{g}}$
- On applique la formule du cours
- On est ramené à calculer $\int_a^b F(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$

SF 2 Calculer $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ en posant $x=\varphi(t)$

- On calcule $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\varphi'(t)$ et $\mathrm{d}x=\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ puis on isole $\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ dans l'intégrale.
- On effectue trois remplacements :
  - $f(\varphi(t))$ par $f(x)$
  - $\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ par $\mathrm{d}x$
  - les bornes a et b par $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$

SF 3 Calculer $\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$ en posant $x=\varphi(t)$

- On calcule $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\varphi'(t)$ et $\mathrm{d}x=\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$
- On effectue trois remplacements :
  - $f(x)$ par $f(\varphi(t))$
  - $\mathrm{d}x$ par $\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$
  - α et β par a et b tels que $\varphi(a)=\alpha$ et $\varphi(b)=\beta$

SF 4 Justifier que $\int_a^b f$ est « bien définie »

On justifie que f est continue par morceaux sur $[a,b]$. Il y a deux cas typiques :

- *1er cas.* f est continue sur $[a,b]$.
- *2e cas.* f est continue sur $]a,b]$ (par ex.) et f est prolongeable par continuité en a.

SF 5 Majorer/minorer $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

On encadre « l'intérieur » :

1. On cherche un encadrement de la forme : $\forall t\in[a,b],\quad g(t)\leq f(t)\leq h(t)$
2. Par croissance de l'intégrale, si $a\leq b$, on peut écrire : $\int_a^b g\leq\int_a^b f\leq\int_a^b h$.

SF 6 Calculer une limite d'intégrales (ou en trouver un équivalent)

On utilise en général le théorème d'encadrement et la technique précédente.

SF 7 Montrer une propriété du type « $f(t)=\ldots$ » à partir de « $\int_a^b f=\ldots$ »

Si $a\leq b$, on peut essayer de construire judicieusement une fonction g telle que :

i) g continue sur $[a,b]$ *ii)* g positive sur $[a,b]$ *iii)* $\int_a^b g=0$.

Par théorème $g=0$ sur $[a,b]$ ce qui peut donner une égalité sur f.

SF 8 Etudier une suite d'intégrales $I_n=\int_a^b f_n$

- *Monotonie* Pour montrer : $I_n\leq I_{n+1}$, il suffit de comparer « l'intérieur » *i.e.* il suffit de montrer : $\forall t\in[a,b],\quad f_n(t)\leq f_{n+1}(t)$
- *Convergence de (I_n) **sans** sa limite.* Penser au théorème de la limite monotone.
- *Convergence **et** limite de (I_n).* Penser au théorème d'encadrement.
- *Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.* Penser à l'intégration par parties.

SF 9 Dériver $\varphi: x\mapsto\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$

Si f est continue sur I et u et v sont dérivable sur J et à valeurs dans I, alors φ est dérivable sur I et pour tout $x\in I$, $\quad\varphi'(x)=v'(x)f\big(v(x)\big)-u'(x)f\big(u(x)\big)$

Il faut savoir démontrer ce résultat :

- On considère une primitive F de f sur J (à bon droit si f est continue).
- On exprime φ en fonction de F : $\quad\forall x\in I,\quad\varphi(x)=[F(t)]_{u(x)}^{v(x)}=F\big(v(x)\big)-F\big(u(x)\big)$
- On justifie la dérivabilité et on calcule la dérivée de $\varphi=F\circ v-F\circ u$ à l'aide du théorème de dérivabilité d'une composée.

SF 10 Calculer la limite d'une somme du type $S_n=\sum_{k=1}^{n}u_{n,k}$

Lorsque les termes dépendent de k et n, on peut essayer de faire apparaître une somme de Riemann en écrivant « $k=n\times\frac{k}{n}$ ».

SF 11 Majorer la valeur absolue d'une différence

On peut essayer d'appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange

SF 12 Majorer ou minorer $f(x)$ par des polynômes

On peut appliquer la formule de Taylor à reste intégral à f puis majorer ou minorer le reste intégral en utilisant la croissance de l'intégrale.

SF 13 Mettre une somme sous forme intégrale

- On écrit : $\frac{1}{k}=\int_0^1 t^{k-1}\,\mathrm{d}t$
- on utilise la linéarité de l'intégrale : « $\sum\int\ldots=\int\sum\ldots$ »

SF 14 Effectuer une comparaison somme-intégrale

Pour encadrer $\sum_{k=0}^{n}f(k)$ où $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ décroît :

1. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on peut écrire : $\quad\forall t\in[k,k+1],\quad f(k+1)\leq f(t)\leq f(k)$.
2. La croissance de l'intégrale donne, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $f(k+1)\leq\int_k^{k+1}f(t)\,\mathrm{d}t\leq f(k)$
3. La sommation de ces inégalités permet ainsi de majorer ou minorer $\sum_{k=0}^{n}f(k)$.

SF 15 Développement asymptotique somme-intégrale

Pour montrer que $\sum_{k=0}^{n}f(k)\underset{n\to+\infty}{=}\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t+\ell+o(1)$ où $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ décroît.

1. On écrit $\sum_{k=0}^{n}f(k)=\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t+f(0)-\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\left(\int_{k-1}^{k}f(t)\,\mathrm{d}t-f(k)\right)}_{a_k}=\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t+f(0)-A_n$
2. Avec la décroissance de f, pour tout $k\in\mathbb{N}$: $\quad 0\leq a_k\leq f(k-1)-f(k)$
3. On applique le théorème de la limite monotone à la suite (A_n)