SF 1 Majorer une fraction de réels positifs

Il suffit de majorer le numérateur et minorer le dénominateur.

SF 2 Résoudre une inéquation avec des quotients

- On passe tous les termes dans le membre de gauche.
- On réduit au même dénominateur
- On étudie le signe du quotient (tableau).

SF 3 Résoudre une inéquation avec des valeurs absolues

On distingue des cas pour éliminer les valeurs absolues.

SF 4 Résoudre une inéquation avec des racines carrées

☢ **Attention** ☢ $a \leq \sqrt{x} \iff a^2 \leq x$ uniquement si a est positif.

SF 5 Déduire une inégalité (2) d'une inégalité (1) par substitution

Si une inégalité (1) est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$ (par exemple), on peut l'appliquer à un réel judicieusement choisi pour établir une nouvelle inégalité (2)

SF 6 Démontrer une égalité du type : $\lfloor x \rfloor = n$ où $n \in \mathbb{Z}$

On peut montrer que l'entier n vérifie : • $n \leq x$ • $n+1 > x$

SF 7 Etablir une inégalité du type « $\forall x \in D, \quad f(x) \leq g(x)$ »

- *Méthode 1.* On peut étudier la fonction $f - g$ sur l'ensemble D.
- *Méthode 2.* Lorsque f est dérivable et convexe *i.e.* lorsque f' est croissante :
  - On peut utiliser l'inégalité des tangentes : $\forall a, x \in I,\ f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$
  - On peut utiliser l'inégalité des cordes :

    pour tous $a, b \in I$ tels que $a < b$ et tout $x \in [a, b]$: $f(x) \leq f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

SF 8 Etablir une inégalité du type « $\forall x, y \in I, \quad \varphi(x,y) \leq \psi(x,y)$ »

- *Méthode 1.* On peut fixer y et étudier la fonction $f : x \mapsto \varphi(x,y) - \psi(x,y)$
- *Méthode 2.* En présence d'une fonction convexe :
  - On peut utiliser $f\big((1-t)x + ty\big) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$ pour t bien choisi
  - Pour n variables, on peut utiliser l'inégalité de Jensen.

SF 9 Etablir par récurrence une inégalité du type : « $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$ »

- *Initialisation.* On vérifie que la propriété est vraie au rang 0.
- *Hérédité.* « Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que : $u_n \leq v_n$. Montrons que : $u_{n+1} \leq v_{n+1}$ »

SF 10 Etablir par récurrence double une inégalité : « $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$ »

- *Initialisation.* On vérifie que la propriété est vraie *aux rangs 0 et 1*.
- *Hérédité.* « Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons : $u_n \leq v_n$ et $u_{n+1} \leq v_{n+1}$. Montrons : $u_{n+2} \leq v_{n+2}$ »

SF 11 Etablir par récurrence forte une inégalité : « $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$ »

- *Initialisation.* On vérifie que la propriété est vraie *au rang 0*.
- *Hérédité.* « Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons : $\forall k \in [\![0, n]\!],\quad u_k \leq v_k$

  Montrons que : $u_{n+1} \leq v_{n+1}$ »

SF 12 Etablir un encadrement avec l'inégalité des accroissements finis

On peut utiliser l'inégalité des accroissements finis :

- On parvient à faire apparaître un accroissement de la forme $|f(b) - f(a)|$, la difficulté est de choisir a et b qui peuvent être fonction de x.
- On cherche à encadrer f' sur $[a, b]$.

SF 13 Montrer que f est lipschitzienne sur I

On utilise l'inégalité des accroissements finis : on montre que f' est bornée sur I.

SF 14 Montrer la convergence d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$

- On montre que $f : I \to \mathbb{R}$ est k-lipschitzienne de rapport $k \in]0, 1[$.
- On montre que I est stable par f *i.e.* $f(I) \subset I$.
- On montre qu'il existe un unique $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.
- On montre que $u_n \to \alpha$:
  - *Avec l'inégalité des accroissements finis.*

    Pour tout n, $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq k|u_n - \alpha|$ *i.e.* $|u_{n+1} - \alpha| \leq k|u_n - \alpha|$
  - *Par récurrence sur n.* $\forall n \in \mathbb{N},\quad 0 \leq |u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|$.
  - *Théorème d'encadrement.* Puisque $k \in [0, 1[$: $k^n |u_0 - \alpha| \to 0$ puis $|u_n - \alpha| \to 0$