Des nouveaux savoir-faire sur les fonctions

SF 1 Gérer une expression de la forme $u(x)^{v(x)}$ (l'exposant dépend de x)

On peut revenir à la forme exponentielle : $u(x)^{v(x)} = \exp\big(v(x)\ln u(x)\big)$

SF 2 Résoudre une équation avec des fonctions hyperboliques

En remplaçant par les expressions avec l'exponentielle on aboutit souvent à une équation polynomiale d'inconnue $X = e^x$.

SF 3 Montrer que f réalise une bijection d'un intervalle I sur J

On peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires strictement monotone :

- On précise que f est continue sur I
- On montre f est strictement monotone sur I
- On détermine les valeurs (ou limites) de f aux bornes de I

SF 4 Dériver une fonction réciproque f^{-1}

Lorsque f réalise une bijection de I sur J on peut appliquer le théorème de dérivabilité d'une réciproque à condition que :

- f soit dérivable sur I
- f' ne s'annule pas sur I

Dans ce cas, f^{-1} est dérivable sur J et : $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$

SF 5 Etablir une égalité du type : « $\forall x \in I, \quad f(x) = k$ »

Lorsque f est dérivable sur I on peut :

- Montrer que $f' = 0$ sur I
- Vérifier que $f(x_0) = k$ pour un $x_0 \in I$

SF 6 Etablir une égalité faisant intervenir des Arcsin, Arccos ou Arctan

On peut montrer que les deux membres de l'égalité

- *Dans le cas d'un* Arcsin : *i)* ont même sinus *ii)* appartiennent à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- *Dans le cas d'un* Arccos : *i)* ont même cosinus *ii)* appartiennent à $[0, \pi]$
- *Dans le cas d'un* Arctan : *i)* ont même tangente *ii)* appartiennent à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

SF 7 Résoudre une équation avec Arccos, Arcsin ou Arctan

On procède par analyse-synthèse :

- Dans l'analyse on applique cos, sin ou tan pour obtenir des relations plus simples.
- Dans la synthèse on teste directement les candidats simples. On peut si besoin appliquer le théorème de la bijection pour montrer qu'il y a une seule solution

Rappels : quelques savoir-faire sur les fonctions

SF 8 Etablir une inégalité du type « $\forall x \in D, \quad f(x) \leq g(x)$ »

- *Méthode 1.* On peut étudier la fonction $f - g$ sur l'ensemble D.
- *Méthode 2.* Lorsque f est dérivable et convexe *i.e.* lorsque f' est croissante :
  - On peut utiliser l'inégalité des tangentes : $\forall a, x \in I,\ f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$
  - On peut utiliser l'inégalité des cordes :

    pour tous $a, b \in I$ tels que $a < b$ et tout $x \in [a,b]$: $f(x) \leq f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

SF 9 Etablir une inégalité du type « $\forall x, y \in I, \quad \varphi(x,y) \leq \psi(x,y)$ »

- *Méthode 1.* On peut fixer y et étudier la fonction $f : x \mapsto \varphi(x,y) - \psi(x,y)$
- *Méthode 2.* En présence d'une fonction convexe :
  - On peut utiliser $f\big((1-t)x + ty\big) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$ pour t bien choisi
  - Pour n variables, on peut utiliser l'inégalité de Jensen.

SF 10 Déterminer le nombre de solution d'une équation : $f(x) = k$

On utilise le tableau de variation de la fonction f.

SF 11 Montrer que f est convexe sur I

- *Option 1.* Si f est dérivable, on peut montrer que f' est croissante.
- *Option 2.* On montre : $\forall a, b \in I, \quad \forall t \in [0,1], \quad f\big((1-t)a + tb\big) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$

SF 12 Etablir un encadrement avec l'inégalité des accroissements finis

On peut utiliser l'inégalité des accroissements finis :

- On parvient à faire apparaître un accroissement de la forme $|f(b) - f(a)|$, la difficulté est de choisir a et b qui peuvent être fonction de x.
- On cherche à encadrer f' sur $[a, b]$.