SF 1 — Justifier la continuité d'une fonction sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$

On combine continuité des fonctions usuelles et opérations sur les fonctions continues.

SF 2 — Justifier la continuité de f en un point p à problème

On peut chercher une majoration de la forme : $|f(u)-f(p)| \le \varepsilon(r)$

où :
- $r = \|u-p\|$
- $\varepsilon(r) \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$

SF 3 — Montrer que f n'est pas continue en un point

On peut chercher deux fonctions u et v telles que :
- $u(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} a$ et $v(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} b$
- $t \mapsto f\big(u(t),v(t)\big)$ n'est pas continue en 0.

SF 4 — Calculer des dérivées partielles

Pour calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$: on « gèle » y et on dérive l'expression $f(x,y)$ par rapport à x

SF 5 — Existence de dérivées partielles en un point (a,b) à problème

On étudie : $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t,b)-f(a,b)}{t}$ et $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f(a,b+t)-f(a,b)}{t}$

SF 6 — Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouver U

On procède par opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$:
- *Combinaisons linéaires, produits, quotients.*
  « f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U comme somme (produit ...) de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ »
- *Compositon.* étant données des fonction réelles φ, u, v sur un intervalle I :
  - La fonction $t \mapsto f\big(u(t),v(t)\big)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I si
    i) f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U
    ii) u,v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et si $t \mapsto \big(u(t),v(t)\big)$ est à valeurs dans U
  - La fonction $(x,y) \mapsto \varphi\big(f(x,y)\big)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U si :
    i) φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I
    ii) f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et à valeurs dans I

SF 7 — Déterminer les extremums locaux de f sur un ouvert U

On procède par analyse-synthèse.
- *Dans l'analyse.* Si f possède un extremum local en (x,y) alors c'est un point critique : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.
- *Dans la synthèse.* On *teste les candidats* en étudiant, pour chaque point critique (a,b) trouvé, le signe de $f(a+h,b+k)-f(a,b)$ pour (h,k) voisin de $(0,0)$.

SF 8 — Dériver des fonctions composées

On utilise les règles de la chaîne (voir ci-dessous)

SF 9 — Résoudre une équation aux dérivées partielles

Si l'énoncé propose un changement de variable « $(x,y) = \big(x(u,v),y(u,v)\big)$ »
- *Dans l'analyse.* On considère la fonction $F : (u,v) \mapsto f\big(x(u,v),y(u,v)\big)$
  - On calcule les dérivées partielles de F par la règle de la chaîne
  - En utilisant l'équation sur f, on obtient $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ (ou $\dfrac{\partial F}{\partial v}$) en fonction de u et v
  - On primitive par rapport à la variable u (ou v pour $\dfrac{\partial F}{\partial v}$) pour obtenir une expression de $F(u,v)$ avec une constante $C(v)$ qui dépendra de v.
  - La présence d'une condition aux limites permet d'expliciter $C(v)$.
  - On revient à $f(x,y)$ en exprimant u et v en fonction de x et y.
- *Dans la synthèse.* Pour chaque candidat solution f :
  - on vérifie le caractère $\mathscr{C}^1$ (composition) de f
  - on calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$

Formulaire : dérivation des fonctions composées

Règle de la chaîne (1)

♥

La fonction $F : t \mapsto f\big(x(t),y(t)\big)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I si :
- la fonction $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert U
- les fonctions $x,y \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$ sont telles que $t \mapsto \big(x(t),y(t)\big)$ est à valeurs dans U.

et pour tout $t \in I$:

$$F'(t) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t),y(t)\big) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t),y(t)\big)$$

Règle de la chaîne (2)

♥

La fonction $F : (u,v) \mapsto f\big(x(u,v),y(u,v)\big)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur V si :
- la fonction $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert U
- les fonctions $x,y \in \mathscr{C}^1(V,\mathbb{R})$ sont telles que $(u,v) \mapsto \big(x(u,v),y(u,v)\big)$ est à valeurs dans U

et pour tout $(u,v) \in V$:

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(u,v),y(u,v)\big)\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(u,v),y(u,v)\big)\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(u,v),y(u,v)\big)\frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(u,v),y(u,v)\big)\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)$$