SF 1 Décomposer une permutation en cycles disjoints

Pour trouver la décomposition de $\sigma \in S_n$ en produit de cycles disjoints :

- On calcule les images successives de 1 jusqu'à retomber sur 1
- On recommence avec un élément de $[\![1,n]\!]$ n'apparaissant pas dans le cycle précédent
- On recommence jusqu'à épuisement des éléments de $[\![1,n]\!]$
- On élimine les cycles de longueur 1 (points fixes de σ)

SF 2 Exploiter le fait que S_n est engendré par les transpositions

Pour exploiter/établir une propriété portant sur *toutes* les permutations $\sigma \in S_n$:

- On peut essayer de montrer/utiliser la propriété pour **une** transposition $\tau = (i, j)$.
- On généralise ensuite en écrivant une permutation $\sigma \in S_n$ quelconque sous la forme d'un produit $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_p$ de transpositions $\tau_1, \ldots, \tau_p$ (où $(-1)^p = \varepsilon(\sigma)$).

SF 3 Permutations aléatoires : quelques réflexes utiles

Si σ est une variable aléatoire de loi uniforme sur S_n

- *Probabilité d'un événement associée à σ.* Si A est un sous-ensemble de S_n :
$$P(\sigma \in A) = \frac{|A|}{n!} = \frac{\text{Nb. de permutations qui satisfont } A}{n!}$$
et le calcul de $P(A)$ se ramène à du dénombrement.
- *Espérance et Variance d'une variable N associée à σ.* Si N est une variable aléatoire qui compte le nombre de points de $[\![1,n]\!]$ en lesquels σ vérifie une propriété $\mathscr{P}$, on peut essayer d'écrire N comme une somme de variables indicatrices $\mathbb{1}_{A_k}$ où A_k est un événement du type « σ vérifie $\mathscr{P}$ au point k » puis exploiter les égalités :
$$E(\mathbb{1}_{A_k}) = P(A_k) \qquad \text{et} \qquad E(\mathbb{1}_{A_k}\mathbb{1}_{A_j}) = P(A_k \cap A_j)$$

SF 4 Manipuler formellement un déterminant

Dans le cadre d'un exercice abstrait, pour établir une propriété sur $\det(A)$:

- *Option 1 – Utiliser la définition :* $\det(A) = \displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j}$.
- *Option 2 – Faire apparaître des produits* pour utiliser : $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. C'est notamment utile si on sait que A est semblable, ou équivalente, à une autre matrice.
- *Option 3 – Utiliser la n-linéarité* par rapport aux lignes ou aux colonnes
- *Option 4 – Utiliser le caractère alterné :* $\det(A) = 0$ lorsque ses colonnes (ou lignes) sont liées.

SF 5 Factoriser un déterminant

- *Option 1 – Par opérations élémentaires :* on se ramène par la méthode du pivot à un déterminant triangulaire et donc simple à calculer.
- *Option 2 – En développant selon une rangée :* lorsqu'une ligne ou une colonne contient beaucoup de 0.
- *Option 3 – A l'aide d'un déterminant de Vandermonde :* lorsque l'on peut se ramener à un tel déterminant à l'aide d'opérations élémentaires.
- *Option 4 – En utilisant le calcul par blocs :* lorsque l'on peut se ramener à un déterminant triangulaire par blocs à l'aide d'opérations élémentaires, on peut alors utiliser la formule $\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = \det(A)\det(C)$.

SF 6 Calculer un déterminant tridiagonal D_n d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$

- Pour $n \geq 2$ fixé, on développe D_n suivant une ligne puis suivant une colonne pour mettre en évidence une expression de D_n en fonction de D_{n-1} et de D_{n-2}.
- La relation de récurrence ainsi obtenue et le calcul de D_1 et D_2 permettent d'obtenir une expression de D_n en fonction de n.

SF 7 Prouver qu'une matrice A est inversible

A est inversible si et seulement si son déterminant n'est pas nul.

SF 8 Montrer qu'une famille de n vecteurs est une base

Il suffit de vérifier que son déterminant dans une base de E n'est pas nul

SF 9 Manipuler la comatrice

- *Option 1 – Avec la formule du cours :* $A(\text{com}A)^\top = (\text{com}A)^\top A = \det(A) I_n$

  et dans le cas où A est inversible : $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}(\text{com}A)^\top$
- *Option 2 – En utilisant la définition :* ses coefficients sont les cofacteurs de A.

SF 10 Calculer le déterminant d'un endomorphisme

On calcule le déterminant de sa matrice dans une base bien choisie