SF 1 Lever une forme indéterminée

- On peut factoriser par le terme prépondérant.
- On peut utiliser la quantité conjuguée avec des racines carrées
- On peut faire apparaître un taux d'accroissement.

SF 2 Montrer que f possède une limite en a

- Procéder par opérations, y compris la composition de limites
- Encadrer f pour appliquer le théorème d'encadrement
- Utiliser le théorème de la limite monotone (ne donne pas la valeur de la limite)
- Revenir à la définition de la limite « avec les ε »

SF 3 Montrer que f n'admet pas de limite en a

Construire deux suites telles que : • $\lim u_n = \lim v_n = a$ • $\lim f(u_n) \neq \lim f(v_n)$

SF 4 Montrer que f est continue en a

On montre que : $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$.

SF 5 Montrer que f est prolongeable par continuité en a

On montre que f admet une limite finie en a.

SF 6 Justifier la continuité de f sur un intervalle

On combine la continuité des fonctions usuelles et les opérations sur les fonctions continues (avec soin dans le cas d'une composée).

SF 7 Exploiter l'hypothèse « f est continue en a »

- *A l'aide de la définition.* Pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver $\alpha > 0$ tel que
$$\forall x \in [a-\alpha, a+\alpha] \cap \mathscr{D}_f, \quad f(x) \in [f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon]$$
- *A l'aide des suites.* Pour toute suite (x_n) d'éléments de $\mathscr{D}_f$ et qui converge vers a : $f(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(a)$.

SF 8 Equation fonctionnelles et continuité en un point

On raisonne en général par analyse-synthèse. Dans l'anaylse :

- On cherche une relation de récurrence en réitérant l'hypothèse de l'énoncé
- On utilise ensuite la caractérisation séquentielle de la continuité.

SF 9 Equation fonctionnelles et continuité globlae

On raisonne en général par analyse-synthèse.

- Dans l'analyse, si f est solution on peut essayer de construire une fonction auxiliaire g continue qui vérifie $g(x+y) = g(x) + g(y)$ pour tous x, y.
- On n'oublie pas l'étape de synthèse *i.e.* le test des candidats solutions.

SF 10 Montrer que l'équation $f(x) = g(x)$ admet *au moins* une solution

Appliquer le TVI à la fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - g(x)$.

SF 11 Montrer que l'équation $f(x) = g(x)$ admet *exactement* une solution

Appliquer le TVI strictement monotone à la fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - g(x)$.

SF 12 Montrer qu'une fonction est bornée

Penser au théorème des bornes atteintes (fonction continue sur un segment)

SF 13 Etudier une suite implicite *i.e.* x_n est la solution de $f_n(x_n) = 0$

- L'existence découle de l'application du TVI strictement monotone à f_n.
- Pour la monotonie on peut chercher le signe de $f_{n+1}(x_n)$ et utiliser $0 = f_{n+1}(x_{n+1})$
- Pour le calcul de la limite on fait tendre n vers $+\infty$ dans la relation $f_n(x_n) = 0$.