Rappels sur les nombres complexes

SF 1 Utiliser le conjugué pour montrer que z est réel

Pour montrer que z est réel on peut montrer que $\overline{z} = z$
De même, pour montrer que z est imaginaire pur on peut montrer que $\overline{z} = -z$.

SF 2 Simplifier un quotient de nombres complexes

- On peut multiplier en haut et en bas par le conjugué du dénominateur.
- On peut écrire numérateur et dénominateur sous forme trigonométrique.

SF 3 Manipuler une expression où intervient $|z|$

On peut élever au carré et utiliser : $|z|^2 = z\overline{z}$.

SF 4 Exploiter le fait que z est de module 1

On peut : • utiliser l'égalité : $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$ • remplacer z par $e^{i\theta}$

SF 5 Transformer une expression du type $1 \pm e^{i\theta}$

On factorise par $e^{i\frac{\theta}{2}}$ pour faire apparaître une formule d'Euler.

(dans le cas de $e^{ip} + e^{iq}$, on factorise de même par « l'angle moitié » à savoir $e^{i\frac{p+q}{2}}$)

SF 6 Utiliser Euler pour linéariser $\cos^p x \sin^q x$

1. On utilise les formules d'Euler $\cos^p x \sin^q x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^p \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^q$
2. On développe entièrement avec la formule du binôme
3. On regroupe ensuite les e^{inx} et e^{-inx} pour faire apparaître $\cos nx$ ou $\sin nx$.

SF 7 Utiliser Moivre pour « délinéariser » $\cos nx$

1. On utilise la formules de Moivre : $\cos nx = \mathrm{Re}\Big((\cos x + i \sin x)^n\Big)$
2. On développe $(\cos x + i \sin x)^n$ par la formule du binôme
3. On extrait la partie réelle.

SF 8 Calculer des sommes trigonométriques

1. On utilise : $\cos\theta = \mathrm{Re}(e^{i\theta})$ et $\sin\theta = \mathrm{Im}(e^{i\theta})$
2. On utilise la linéarité de Re et Im : $\mathrm{Re}\Big(\sum \#\Big) = \sum \mathrm{Re}(\#)$ et $\mathrm{Im}\Big(\sum \#\Big) = \sum \mathrm{Im}(\#)$

SF 9 Calculer les puissances d'un complexe

La forme trigonométrique se prête bien au calcul de puissance.

SF 10 Résoudre une équation de la forme $\exp(z) = a$

On met a sous forme trigonométrique et on pose $z = x + iy$.

Nouveautés sur les nombres complexes

SF 11 Utiliser les racines n-ièmes de l'unité

On connaît : • Leur expression : $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$

• Leur somme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0$ (si $n \geq 2$).

SF 12 Faire des calculs avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

On utilise les trois relations : • $j^3 = 1$ • $j^2 = \dfrac{1}{j} = \overline{j}$ • $1 + j + j^2 = 0$

SF 13 Calculer les racines n-ièmes d'un complexe Z non nul

- On écrit Z sous forme trigonométrique $Z = re^{i\theta}$.
- On utilise la formule donnant les racines n-ièmes : $z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$, $k \in [\![0, n-1]\!]$

SF 14 Calculer une racine carrée δ d'un complexe Z

On cherche $\delta = x + iy$ tel que : $\delta^2 = Z$ et $\boxed{|\delta|^2 = |Z|}$

SF 15 Résoudre l'équation : $az^2 + bz + c = 0$ à coefficients complexes

- On calcule dans $\mathbb{C}$ une racine carré δ du discriminant complexe $\Delta = b^2 - 4ac$.
- On utilise les formules du cours

SF 16 Résoudre un système « somme-produit »

Les solutions de $\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p \end{cases}$ sont les racines de l'équation $z^2 - sz + p = 0$

SF 17 Caractériser géométriquement l'application $f : z \mapsto az + b$

Si $a \neq 1$, on calcule : • Le rapport $|a|$ • L'angle $\arg a$ • Le centre $\omega = \dfrac{b}{1-a}$

SF 18 Traduire l'orthogonalité et l'alignement

• $A(a)$, $B(b)$ et $M(z)$ sont alignés ssi : $\dfrac{z-b}{z-a} \in \mathbb{R}$ • $(MA) \perp (MB)$ ssi : $\dfrac{z-b}{z-a} \in i\mathbb{R}$