SF 1 — Pour trouver un équivalent

- On peut combiner les équivalents usuels et les opérations sur les équivalents (à l'exception de la somme et de la composition)
- Dans le cas d'une somme on peut supprimer les termes négligeables devant les autres.
- On peut effectuer un DL et prendre le *premier terme non nul*.

SF 2 — Obtenir un DL_n en 0 d'une combinaison linéaire $\lambda f + \mu g$

On combine termes à termes les DL_n en 0 de f et de g.

SF 3 — Obtenir un DL_n en 0 du produit fg

- On écrit les DL_n en 0 de f et g (en cas de gain d'ordre *i.e.* si l'un des deux DL commence par un terme en x^p on peut développer l'autre à l'ordre $n-p$)
- On effectue le produit des DL en « aspirant » dans le $o(x^n)$ tous les x^{n+1}, x^{n+2}, ...

SF 4 — Obtenir un DL_n en 0 de la composée $x \mapsto f(u(x))$ avec $u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$

- On écrit le DL_n en 0 de la fonction $u : x \mapsto u(x)$
- On écrit le DL_n en 0 de f avec la lettre u puis on remplace u par le DL de $u(x)$.

SF 5 — Pour obtenir un DL_n de $\frac{f}{g}$

On essaie de se ramener à $\frac{N(x)}{1+u(x)} = N(x) \times \frac{1}{1+u(x)}$ avec $u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$

SF 6 — Pour obtenir un DL_n d'une primitive

On utilise le théorème de primitivation en partant d'un DL_{n-1} de la dérivée. C'est une méthode efficace dans le cas d'une fonction définie par une intégrale ou d'une fonction trigonométrique réciproque.

SF 7 — Obtenir un DL_n de f en $a \neq 0$

On « pose » $g(h) = f(a+h)$:

- On effectue un DL_n en 0 de $g : h \mapsto f(a+h)$
- On revient à x en posant « $h = x-a$ »

SF 8 — Obtenir le DL_n de la réciproque f^{-1} en $b = f(a)$

- On justifie l'existence d'un DL_n en b pour f^{-1} avec Taylor-Young
- On écrit le DL_n de f^{-1} avec des coefficients indéterminés
$$f^{-1}(y) \underset{y\to b}{=} a + a_1(y-b) + \cdots + a_n(y-b)^n + o((y-b)^n$$
- On effectue le changement de variable $y = f(x)$:
$$x - a \underset{x\to a}{=} a_1\big(f(x)-b\big) + \cdots + a_n\big(f(x)-b\big)^n + o((x-a)^n)$$
- On remplace $f(x)$ par son DL_n en a et on identifie à $x-a$.

SF 9 — Lever une forme indéterminée « quotient » $f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$

On peut utiliser les équivalents : on cherche un équivalent de $N(x)$ et de $D(x)$.

SF 10 — Lever une forme indéterminée « puissance » $f(x) = a(x)^{b(x)}$

On revient à la forme exponentielle : $f(x) = \exp\big(u(x)\big)$ où $u(x) = b(x)\ln\big(a(x)\big)$.
On peut utiliser les équivalents pour chercher la limite de $u(x)$.

SF 11 — Montrer que f se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I

- On justifie que f est $\mathscr{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$ par opérations.
- On étudie $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ pour prolonger f par continuité en a (on cherche donc un équivalent de f en a, éventuellement en utilisant les DL).
- On étudie $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f'(x)$ pour appliquer le théorème de la limite de la dérivée et ainsi montrer que f est dérivable en a et que f' y est continue (on cherche donc un équivalent de f' en a éventuellement en utilisant les DL).

SF 12 — Etudier localement f au voisinage de a (prolongement, tangente ...)

- On cherche un DL_n de f en a : $\quad f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$
  où $a_n \neq 0$ est le premier terme non nul de degré au moins 2 (en pratique 2 ou 3).
- Le prolongement par continuité découle de ce que $f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + o(1) \underset{x\to a}{\longrightarrow} a_0$.
- Le taux d'accroissement s'écrit $\frac{f(x)-a_0}{x-a} \underset{x\to a}{=} a_1 + o(1) \underset{x\to a}{\longrightarrow} a_1$.
- L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en a est $y = T_a(x)$ où $T_a(x) = a_0 + a_1(x-a)$.
- La position relative au voisinage de a est donnée par le signe de
$$f(x) - T_a(x) \underset{x\to a}{=} a_n(x-a)^n + o((x-a)^n) \underset{x\to a}{\sim} a_n(x-a)^n$$
- On utilise la conservation du signe par équivalence :
  au voisinage de a, $\quad f(x) - T_a(x)$ est du signe de $a_n(x-a)^n$

SF 13 — Utiliser un DL pour étudier une asymptote en $+\infty$

On pose $g(h) = hf(\frac{1}{h})$:

- On effectue un DL_n de g en 0^+ avec $n \geq 2$: $\quad hf\Big(\dfrac{1}{h}\Big) = g(h) \underset{h\to 0^+}{=} a_0 + a_1 h + a_n h^n + o(h^n)$
- On « revient » à x en posant « $h = \dfrac{1}{x}$ » : $\quad f(x) \underset{x\to+\infty}{=} a_0 x + a_1 + \dfrac{a_n}{x^{n-1}} + o\Big(\dfrac{1}{x^{n-1}}\Big)$
- L'équation de l'asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ est $y = a_0 x + a_1$.
- Si $a_n \neq 0$, la position relative au voisinage de $+\infty$ est donnée par le signe de a_n :
$$f(x) - (a_0 x + a_1) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{a_n}{x^{n-1}} + o\Big(\frac{1}{x^{n-1}}\Big) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{a_n}{x^{n-1}}$$