II Séries à termes positifs

1 Sommes partielles d'une série à termes positifs

Théorème 1

Soit u une suite réelle. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs *i.e.* $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La série $\sum u_n$ converge ssi :

Exercice 1 — Démontrer le théorème.

2 Critères de convergence par comparaison

Théorème 2 : Comparaison par des inégalités

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose qu'*à partir d'un certain rang*, $0 \leq u_n \leq v_n$.

-
-

Exercice 2 — Démontrer le théorème dans le cas où $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 1 SF 4 — **a)** Etudier la nature de la série $\sum \frac{\operatorname{th} n}{n^2+1}$. **b)** Etudier la nature de la série $\sum \frac{e^{\cos n}}{n}$.

Théorème 3 : Comparaison par des équivalents

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose qu'à partir d'un certain rang, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$.

Si $u_n \sim v_n$ alors :

Exercice 3 *Ex. 7.1, banque INP* — Démontrer le théorème dans le cas où $u_n \geq 0$ et $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 2 SF 4 — Etudier la nature de $\sum u_n$ **a)** $u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ **b)** $u_n = \sin\left(\frac{1}{n-\sqrt{n}}\right)$ **c)** $u_n = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \cos\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Exemple 3 — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \ln n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que la suite (u_n) converge.

Rappel sur les « grands O »

- **Rappel.** $u_n = O(v_n)$ signifie :
- **Exemples.** **a)** $2n = O(\ldots)$ **b)** $\sin(n^2) = O(\ldots)$ **c)** $\frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}} = O(\ldots)$
- **Dans un DL.** **a)** $\sqrt{1+\frac{1}{n}} =$ **b)** $\ln(1+\frac{1}{n}) =$

Théorème 4 : Comparaison par des grands O/petits o

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si : *i)* *ii)* *iii)*

Alors :

- **Remarque.** Les trois théorèmes précédents sont aussi vrais si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq 0$ et $v_n \leq 0$. L'important est que u_n et v_n gardent un signe constant (typiquement, pas de $(-1)^n$).

Exercice 4 — Démontrer le théorème.

Exemple 4 SF 4 — Etudier la nature de $\sum u_n$ **a)** $u_n = e^{-\sqrt{n}}$ **b)** $u_n = \frac{\sqrt{n}\, e^{\cos n} + \sin^2(n)}{n^3 - n}$ **c)** $u_n = \frac{\sqrt{n}\, e^{\cos n} + \sin^2(n)}{n^{5/2} - n}$

SF 4 : comparaison avec une série de Riemann

Lorsque l'on étudie la nature d'une série $\sum u_n$, si on trouve $\alpha > 1$ tel que : $n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Alors

Exemple 5 — Etudier la nature de $\sum u_n$: **a)** $u_n = \frac{\ln n}{n^4}$ **b)** $u_n = \frac{\ln n}{n^2}$ **c)** $u_n = \frac{\ln n}{n^{3/2}}$ **d)** $u_n = \frac{\ln n}{n^\alpha}$ où $\alpha > 1$