1 Calcul des racines carrées sous forme algébrique

• **Cadre.** • On donne $Z \in \mathbb{C}^*$ • On cherche les deux racines carrées (opposées) de Z.

Attention La notation $\sqrt{Z}$ est interdite si $Z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$.

SF 14 : calculer une racine carrée δ d'un complexe Z

On cherche $\delta = x + iy$ tel que : $\delta^2 = Z$ et $\boxed{|\delta|^2 = |Z|}$

Exemple 1 — Calculer les racines carrées de $3-4i$.

2 Equation du second degré $(E): \ az^2 + bz + c = 0$ à coefficients complexes

• **Cadre.** • $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$ • On note : $\Delta = b^2 - 4ac$ le *discriminant* de l'équation

Théorème 1

• Si , (E) a une solution unique :

• Si , (E) a deux solutions distinctes :

où δ est *une* racine carrée de Δ.

Exercice 1 — Démontrer le théorème en mettant le trinôme $az^2 + bz + c$ sous forme canonique.

SF 15 : Résoudre l'équation : $az^2 + bz + c = 0$ à coefficients complexes

Exemple 2 — Résoudre l'équation $z^2 - (3+i)z + 2 + i = 0$.

• **Cas particulier où le discriminant est réel.** Dans le cas où le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est réel :

• si $\Delta \geq 0$: $\boxed{z_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$ On prend : $\delta=\sqrt{\Delta}$

• si $\Delta < 0$: $\boxed{z_1 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}}$ On prend : $\delta=i\sqrt{-\Delta}$

3 Somme et produit des racines

• **Remarque.** Les deux racines de l'équation (E) vérifient : • •

Théorème 2

Soit $s, p \in \mathbb{C}$. Les solutions de $\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p \end{cases}$ sont :

Exercice 2 — Démontrer le théorème.

SF 16 : Résoudre un système « somme-produit »

Exemple 3 — Résoudre le système d'inconnue $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$: $\begin{cases} z_1 + z_2 = 6i \\ z_1 z_2 = -13 \end{cases}$.

Exemple 4 — Soit $a \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Résoudre : **a)** $z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0$ **b)** $z^2 - (1 + a + a^2)z + a(1 + a^2) = 0$

4 Factorisation des polynômes : deux petits résultats

• **Cadre.** • $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ • $P : z \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ est une fonction polynomiale • $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P *i.e.* $P(\alpha) = 0$

Théorème 3

Il existe une fonction polynomiale Q telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

Exercice 3 — Démontrer le théorème

Exercice 4 ♥ — On suppose que les a_k sont tous réels. Montrer que $\overline{\alpha}$ est aussi une racine de P.

Exemple 5 — Montrer que $P : z \mapsto (1+z)^7 - z^7 - 1$ est divisible par $z^2 + z + 1$.