IV Polynômes scindés et relations entre coefficients et racines

1 Polynômes scindés

Définition 1

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, non constant, de degré $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que P est *scindé sur* $\mathbb{K}$ si :

- P se factorise dans $\mathbb{K}[X]$ en un produit de polynômes de degré 1 *i.e.* : $P =$
- C'est équivalent à :

Exemple 1 — Les polynômes suivants sont-ils scindés sur $\mathbb{R}$: **a)** $P = X^4 - 2X^2 + 1$. **b)** $Q = X^3 - 1$

Exemple 2 SF 6 — Soit $n \geq 2$. **a)** ♥ Montrer : $\boxed{X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)}$ **b)** En déduire : $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} X^k = \prod_{k=1}^{n-1}\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)}$

Théorème 1 : d'Alembert-Gauss (Admis)

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède :

En conséquence :

Exercice 1 — Démontrer la conséquence par récurrence sur le degré à l'aide du théorème de d'Alembert-Gauss

2 Relations entre coefficients et racines

- **Cadre.** • $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_n(X - z_1) \times \cdots \times (X - z_n)$ est un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$ de degré n.

■ Rappel : le cas $n = 2$

Si $P = aX^2 + bX + c = a(X - z_1)(X - z_2)$ alors : • $z_1 + z_2 =$ • $z_1 z_2 =$

SF 5 : Résoudre un système non linéaire

Les solutions de $\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p \end{cases}$ sont :

■ Cas particulier important : le cas $n = 3$

Théorème 2

Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d = a(X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)$:

• • •

Exercice 2 — Etablir ces relations en développant l'expression factorisée de P puis en identifiant les coefficients.

SF 5 : Résoudre un système non linéaire

Les solutions de $\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = \alpha \\ z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = \beta \\ z_1 z_2 z_3 = \gamma \end{cases}$ sont :

Exemple 3 SF 5 — Résoudre le système (S) suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$, $(S) : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ xy + yz + xz = -2 \\ xyz = -1 \end{cases}$

■ Le cas général

En identifiant les coefficients dans l'égalité : $(X - z_1)(X - z_2)\dots(X - z_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{a_n} X^k$, on obtient le théorème :

Théorème 3

• $z_1 + z_2 + \cdots + z_n =$ • $z_1 z_2 + z_1 z_3 + \cdots + z_{n-1} z_n =$ • $z_1 z_2 \dots z_n =$

- **Remarque.** Plus généralement pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

Exemple 4 — Soit $n \geq 2$. En considérant le polynôme $P = X^n - 1$, retrouver la formule donnant la somme des racines n-ièmes de l'unité et trouver une formule pour le produit.