Exercice 3 — 1. *La symétrie, la bilinéarité et la positivité ne posent aucun problème, je ne détaille que la séparation.*

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Supposons que : $0 = (P \mid P) = \int_{-1}^{1} P(x)^2 \, \mathrm{d}x$ et montrons que P est le polynôme nul.

Sur l'intervalle $[-1,1]$, la fonction $h : x \mapsto P(x)^2$ est : *i)* Continue ; *ii)* Positive ; *iii)* D'intégrale nulle.
Par théorème $h = 0$ sur $[-1,1]$ *i.e.* : $\forall x \in [-1,1], \quad P(x) = 0$
Par conséquent P a une infinité de racines donc, par théorème, P est le polynôme nul.

2. Considérons la famille $(P_0, \dots, P_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ obtenue en appliquant l'algorithme de Graam-Schmidt à la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$. Par théorème $(P_0, \dots, P_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ et :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \mathrm{Vect}(P_0, \dots, P_k) = \mathrm{Vect}(1, X, \dots, X^k)$$

Soit $k \in [\![0,n]\!]$. On sait que $P_k \in \mathrm{Vect}(1, \dots, X^k)$ donc $\deg P_k \leq k$.
De plus la liberté de $(P_0, \dots, P_k)$ assure que $P_k \notin \mathrm{Vect}(P_0, \dots, P_{k-1}) = \mathrm{Vect}(1, \dots, X^{k-1})$ (cette condition se réduisant à $P_k \neq 0$ si $k = 0$).
On en déduit que $\deg P_k = k$.

3. Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Par théorème $Q \in \mathrm{Vect}(P_0, \dots, P_{n-1})$. Puisque P_n est orthogonal à chaque P_i pour $i \leq n-1$ on en déduit que $(P_n \mid Q) = 0$.

4. On sait déjà que P_n possède *au plus n racines* dans $[-1,1]$.
Soient $-1 < x_1 < \cdots < x_p < 1$ les racines de P_n dans $]-1,1[$ en lesquels P_n change de signe [1] (en particulier $p \leq n$). Par construction, la fonction $t \mapsto P_n(t)Q(t)$ est de signe constant (Q change de signe exactement en les mêmes points que S_n). Puisque cette fonction est continue et non nulle (c'est un polynôme de degré $n+p \geq 0$), on en déduit que $\int_{-1}^{1} P_n(t)Q(t) \, \mathrm{d}t \neq 0$. Ainsi $(P_n \mid Q) \neq 0$ donc par la question précédente, $p = \deg Q > n-1$.
Ainsi $p = n$ ce qui assure que P_n a exactement n racines (et qu'elles sont toutes simples et dans $]-1,1[$).

5. Notons Ψ la forme linéaire de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ suivante $\quad \Psi : B \mapsto \int_{-1}^{1} B(x) \, \mathrm{d}x$
Par ailleurs, pour $i \in [\![1,n]\!]$ note φ_i la forme linéaire de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, $B \mapsto B(x_i)$.
Il s'agit de montrer que $\Psi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.
Montrons que $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est génératrice de $\mathscr{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X], \mathbb{R})$, ce qui suffira.
Vu que cette famille est de cardinal $n = \dim\big(\mathscr{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X], \mathbb{R})\big)$, il suffit de prouver qu'elle est libre.

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k = 0$ *i.e.*, pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$: $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(P) = 0$ ou encore : $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k P(x_k) = 0$ Notons $L_1, \dots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés à $x_1, \dots, x_n$.
Fixons $i \in [\![1,n]\!]$, on sait que $\deg L_i = n-1$ donc $L_i \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et : $\quad L_i(x_i) = 1 \quad$ et $\quad L_i(x_k) = 0$ pour $k \neq i$

En évaluant $P = L_i$ la relation ci-dessus : $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k L_i(x_k) = 0$ et il reste : $\alpha_i = 0$, ceci pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

6. Soit $A \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$. Ecrivons la division euclidienne de A par P_n : $\quad A = P_n Q + R \quad$ où $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Par linéarité de l'intégrale $\quad \int_{-1}^{1} A(x) \, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} P_n(x)Q(x) \, \mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} R(x) \, \mathrm{d}x.$

Or : $\deg Q \leq n-1$ car $\deg P_n = n$ et $P_n Q = A - R \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$. Par la question 3 : $\int_{-1}^{1} P_n(x)Q(x) \, \mathrm{d}x = (P_n \mid Q) = 0.$

Ainsi avec la question qui précède, puisque $\deg R \leq n-1$: $\int_{-1}^{1} A(x) \, \mathrm{d}x = 0 + \int_{-1}^{1} R(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \delta_i R(x_i).$

Enfin, puisque les x_i sont racines de P_n, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$: $\quad R(x_i) = A(x_i) - P_n(x_i)Q(x_i) = A(x_i) - 0 = A(x_i).$

7. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. On sait que $\deg L_k = n-1$ donc $L_k^2 \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$.

Avec le résultat qui précède : $\int_{-1}^{1} L_k^2(t) \, \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \delta_i L_k(x_i)^2 = \delta_k \quad$ (car $L_i(x_k) = 0$ pour $i \neq k$ et $L_k(x_k) = 1$)

Ainsi par positivité de l'intégrale, puisque $L_k^2 \geq 0$: $\quad \delta_k = \int_{-1}^{1} L_k^2 \geq 0.$

1. *i.e.* les racines de multiplicité impaire