1 La théorie

•Cadre. • $(u_1,...,u_n)$ est une famille libre • On veut transformer $(u_1,...,u_n)$ en une famille orthonormée $(e_1,...,e_n)$

Construction de proche en proche des e_k

• Pour $k = 1$

• Pour $k = 2$

Plus généralement, pour tout $k \in [\![2,n]\!]$:

•

•

Théorème 1

Exercice 1 — Démontrer par récurrence sur $k \in [\![1,n]\!]$ la propriété

$$\mathscr{P}_k : \text{« la famille } (e_1,\dots,e_k) \text{ est une base orthonormée du sous-espace } \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_k) \text{ »}$$

Théorème 2 : Bases orthonormées en dimension finie

On suppose que E est un espace euclidien non réduit à $\{0_E\}$. Alors :

1.

2.

Exercice 2 — Démontrer le théorème.

2 La pratique

Exemple 1 —

1. Prouver que la relation $(P \mid Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Orthonormaliser grâce à l'algorithme de Gram-Schmidt la famille $(1, X, X^2)$.
3. Calculer le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$.

3 Un exercice classique pour s'entraîner

Exercice 3 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose : $\quad (P \mid Q) = \displaystyle\int_{-1}^1 P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x.$

1. Justifier que $(P,Q) \mapsto (P \mid Q)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Justifier qu'il existe une base orthonormée $(P_0,\dots,P_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que : $\quad \forall k \in [\![0,n]\!] : \quad \deg P_k = k$.
3. Calculer $(P_n \mid Q)$ pour $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
4. Montrer que P_n possède n racines distinctes dans $[-1,1]$. *Indication : Considérer le polynôme* $Q = \prod_{i=1}^{p}(X - x_i)$ *où* $x_1 < \dots < x_p$ *sont les racines de* P_n *dans* $[-1,1]$ *en lesquelles* P_n *change de signe.*
5. On note $x_1 < \dots < x_n$ les n racines distinctes de P_n.
   Montrer qu'il existe $\delta_1,\dots,\delta_n \in \mathbb{R}$ tels que : $\quad \forall B \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \displaystyle\int_{-1}^1 B(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^n \delta_i B(x_i).$
6. Montrer : $\quad \forall B \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \quad \displaystyle\int_{-1}^1 B(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^n \delta_i B(x_i).$ *Indication : Effectuer une division euclidienne*
7. Démontrer : $\quad \forall k \in [\![1,n]\!], \quad \delta_k \geq 0.$