Notations

- **Intervalles d'entiers.** Pour $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a \leq b$ on pose : $[\![a\,,b]\!] =$

  Par exemple $[\![2\,,4]\!] = \{2,3,4\}$.

Attention L'intervalle $[\![a\,,b]\!]$ possède : éléments.

Définition 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *factorielle* n l'entier :

- Par convention $0! = 1$.
- *Relation de récurrence :* Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(n+1)! =$

Exemple 1 — Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Ecrire les expressions suivantes à l'aide de factorielles :
a) $A = (p+1) \times (p+2) \times \cdots \times (p+n)$. **b)** $B = 2 \times 4 \times \cdots \times 2p$. **c)** $C = 1 \times 3 \times \cdots \times (2p+1)$.

1 Récurrence simple

Dans ce qui suit, P désigne une propriété qui s'applique aux entiers naturels.

Le principe de récurrence

Si : • $P(0)$ est vraie, • P est « héréditaire » *i.e.* : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (P(n) \implies P(n+1))$,
alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

SF 9 : Etablir par récurrence une inégalité du type : « $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$ »

Exemple 2 — Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|\sin(nx)| \leq n|\sin x|$.

- **Remarque.** Il est possible de procéder à l'initialisation à partir d'un entier $n_0 > 0$. En ce cas la conclusion sera que la propriété $P(n)$ est vraie *à partir du rang* n_0 *i.e.* pour tout entier $n \geq n_0$.

2 Variantes du principe de récurrence

Récurrence double

Variante à utiliser lorsque l'on ne sait déduire $P(n+2)$ que des deux propriétés précédentes $P(n)$ et $P(n+1)$:

Principe de récurrence double

Si :
- $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies,
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \big(P(n) \text{ et } P(n+1)\big) \implies P(n+2)$,

alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

SF 10 : Etablir par récurrence double une inégalité du type : « $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$ »

Exemple 3 — On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ et : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \geq n$.

Exemple 4 — On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = u_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + \dfrac{u_n}{n+1}$.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $1 \leq u_n \leq n^2$.

Récurrence forte

A utiliser lorsque l'on ne sait déduire $P(n+1)$ que de toutes les propriétés précédentes $P(0), P(1), \ldots, P(n)$.

Principe de récurrence forte

Si :
- $P(0)$est vraie,
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \big(P(0), P(1), \ldots, P(n)\big) \implies P(n+1)$,

alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

SF 11 : Etablir par récurrence forte une inégalité du type : « $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$ »

Exemple 5 — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que $u_0 = 1$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq \sum_{k=0}^{n} u_k$.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq 2^n$.