I Rappels sur l'ensemble $\mathbb{C}$

1 Structure de $\mathbb{C}$

L'ensemble $\mathbb{C}$, dont les éléments sont appelés nombres complexes, a les propriétés suivantes :

i) $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$ et on peut étendre aux nombres complexes l'addition et la multiplication des réels ;

ii) $\mathbb{C}$ possède un élément i tel que $i^2 = -1$;

iii) Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous *forme algébrique* : $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$

- x est noté : $\mathrm{Re}(z)$ *(partie réelle de z)*
- y est noté : $\mathrm{Im}(z)$ *(partie imaginaire de z)*

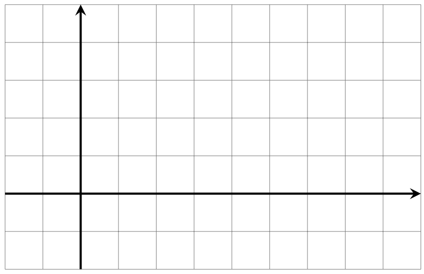
- **Remarques:** • z est réel ssi :

  • Lorsque $\mathrm{Re}(z) = 0$ on dit que :

Attention En général :

2 Représentation géométrique des complexes

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Tout complexe $z = x + iy$ peut être identifié :

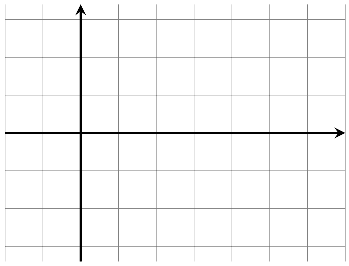


-

-

- **Rappel.** Si $a \in \mathbb{C}$ est l'affixe du point A et si $b \in \mathbb{C}$ l'affixe de B alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe :

3 Conjugaison



Définition 1

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Le *conjugué* de z est le complexe :

Théorème 1 : Propriétés du conjugué

Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

• • •

Théorème 2 : Règles de calculs pour manipuler des conjugués

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$: • • •

SF 1 : Utiliser le conjugué pour montrer que z est réel

Exemple 1 — Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que le nombre complexe $\dfrac{\bar{z} - iz}{i - 1}$ est réel.

4 Module

Définition 2

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. • Le *module* de z est le réel positif : • Retenir :

Théorème 3 : Règles de calcul avec le module

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. • • • Si $z \neq 0$: • Pour $n \in \mathbb{N}$:

Inégalités triangulaires : 1. 2.

- **Remarque.** Si $z \in \mathbb{R}$:

SF 2 : Simplifier un quotient de nombres complexes

Exemple 2 — Mettre sous forme algébrique le complexe : $z = z_1/z_2$ où $z_1 = 3 + 6i$ et $z_2 = 3 - 4i$.

Exercice 1 ♥ — **1.** Démontrer les inégalités triangulaires.
2. Montrer qu'il y égalité ssi z et z' sont colinéaires de même sens *i.e.* ssi $z' = 0$ ou il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $z = kz'$.

- **Géométriquement.** • Si $\vec{u}$ a pour affixe z : • Si A, B ont pour affixes a, b :

Exercice 2 *A retenir* — Décrire géométriquement les ensembles : **a)** $\mathscr{C} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = r\}$ **b)** $\mathscr{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r\}$

Exemple 3 — Trouver tous les $z \in \mathbb{C}$ tels que : $|z - 1| = |z|$.