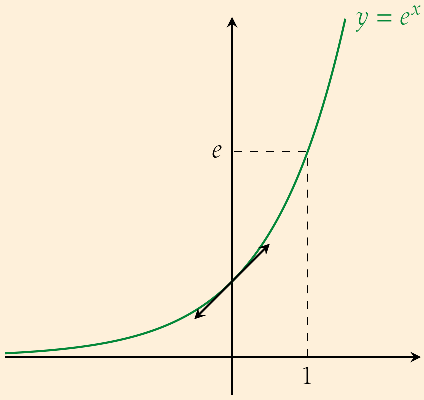
I Fonction exponentielle, logarithme et puissances

1 Rappels sur l'exponentielle et le logarithme

La fonction exponentielle

- *Dérivée.*
  La fonction exp est définie, dérivable et convexe sur $\mathbb{R}$ et : $\exp' = \exp$.
- *Monotonie.* exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- *Valeurs remarquables.* $e^0 = 1$, $\exp(1) = e \approx 2.71828$.
- *Tableau de variation et limites.*

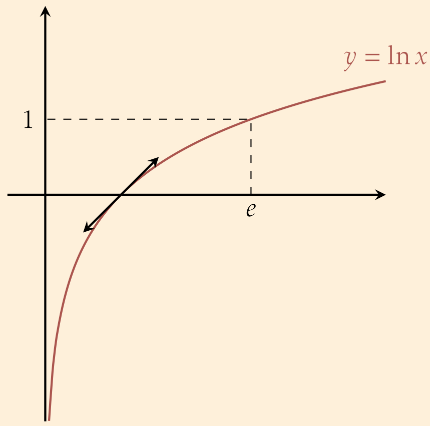
x	$-\infty$	0	$+\infty$
exp	0 ↗	1 ↗	$+\infty$



Fonction logarithme (népérien)

- *Dérivée.*
  ln est définie dérivable et concave sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$: $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$
- *Monotonie.* ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$
- *Valeurs remarquables.* $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$.
- *Tableau de variation (et limites).*

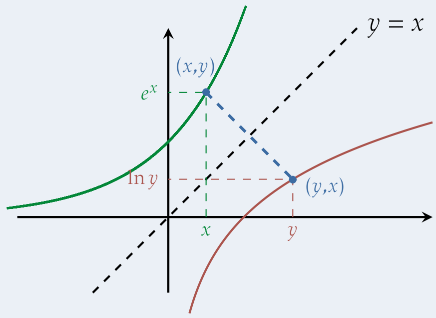
x	0	1	$+\infty$
ln	‖ $-\infty$ ↗	0 ↗	$+\infty$



Théorème 1 : Réciprocité

Les fonctions exp et ln sont réciproques l'une de l'autre

- Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$: $\ln(e^x) = x$ et $e^{\ln y} = y$
- Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$:
$$e^x = y \iff x = \ln y$$
- *Graphiquement.* Les graphes des fonctions exp et ln sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Théorème 2 : somme/produit

- Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$: • $e^{x+y} = e^x e^y$ • $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$ • $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ • $e^{nx} = (e^x)^n$
- Pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}$: • $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ • $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$ • $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln x$ • $\ln(x^n) = n \ln x$

Théorème 3 : Deux limites à connaître

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$