

- **Cadre.** n est un entier naturel non nul fixé.

Définition 1

Soit $Z \in \mathbb{C}^*$. On appelle *racine n -ième de Z* tout :

- **Vocabulaire.** Les racines n -ièmes de 1 sont appelées *racines n -ièmes de l'unité*.

Exemple 1 — Montrer que **a)** $1+i$ est une racine carrée de $2i$ **b)** $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ est une racine cubique de l'unité

1 Racines n -ièmes de l'unité

Théorème 1

Il y a exactement n racines n -ièmes de l'unité, ce sont les complexes

Exercice 1 ❤ Ex. 84.2, banque INP — Démontrer le théorème en cherchant tous les $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^n = 1$.

- **Notation.** L'ensemble des racines n -ièmes de l'unité est noté \mathbb{U}_n .

Théorème 2

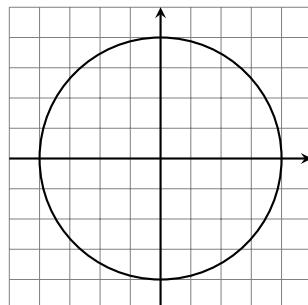
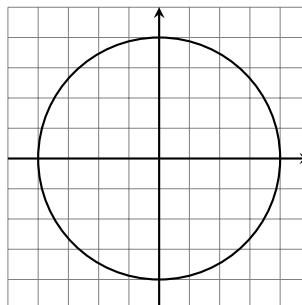
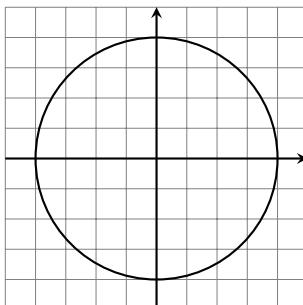
1. Les racines n -ièmes de l'unité sont des puissances de ω_1 :
2. Pour $n \geq 2$, la somme des racines n -ièmes de l'unité est nulle :

Exercice 2 ❤ — Démontrer le théorème.

Petites valeurs de n .

$$\bullet \mathbb{U}_2 = \bullet \mathbb{U}_3 = \bullet \mathbb{U}_4 =$$

• **Remarque.** Les racines n -ièmes de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier, inscrit dans le cercle trigonométrique, et passant par 1.



Définition 2

On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Les racines 3^e de l'unité sont :

Relations à retenir : • • •

Exemple 2 SF 12 — Simplifier le complexe $Z = \frac{1+j}{1-j}$

SF 11 : Utiliser les racines n -ièmes de l'unité

Exemple 3 Ex. 84.3, banque INP — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$.
On exprimera simplement les solutions à l'aide des fonctions cosinus et sinus.

2 Racines n -ièmes d'un complexe Z non nul

Théorème 3

Le complexe $Z = re^{i\theta}$ possède exactement n racines n -ièmes, ce sont les complexes :

Exercice 3 — Démontrer le théorème en commençant par vérifier que $z_0 = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}}$ convient.

SF 13 : Calculer les racines n -ièmes d'un complexe Z non nul

Exemple 4 — Déterminer les racines cubiques de $Z = 2+2i$.

Exemple 5 — Peut-on calculer sous forme algébrique les racines carrées de : **a)** $Z = 2i$? **b)** $Z = 3-4i$?