II Racines d'un polynôme

1 Evaluation d'un polynôme

• **Vocabulaire.** Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, on note $P(\alpha)$ le nombre :

Attention Pour obtenir $P(3)$: • on ne dit pas : • on dit plutôt :

• **Remarque.** On associe à $P \in \mathbb{K}[X]$ la *fonction polynomiale* $\widetilde{P} : x \mapsto P(x)$ de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$.
Pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$: $\widetilde{P+Q} = \widetilde{P} + \widetilde{Q}$ $\widetilde{PQ} = \widetilde{P}\widetilde{Q}$ et $\widetilde{P(Q)} = \widetilde{P} \circ \widetilde{Q}$

Définition 1

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. On dit que a est une racine de P dans $\mathbb{K}$ si :

Exemple 1 — Dans chacun des cas ci-dessous, quelles sont les racines de P dans $\mathbb{K}$
a) $P = X+3$; $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ **b)** $P = X^2+1$; $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ **c)** $P = X^2+1$; $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ **d)** $P = 5$; $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ **e)** $P = X^n - 1$; $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

SF 2 : Calculer le reste de la D.E. de A par B

♥ **Exemple 2** — Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer le reste de la division euclidienne de X^n par : **a)** $X^2 - 3X + 2$ **b)** $X^2 - 4X + 4$

2 Racines et divisibilité

Théorème 1

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. $P(a) = 0$ ssi

Exercice 1 ♥ — Démontrer ce théorème

Théorème 2 : Généralisation

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$, deux à deux distincts ($k \in \mathbb{N}^*$).

Exercice 2 — Démontrer ce résultat par récurrence sur k.

SF 3 : Montrer qu'un polynôme en divise un autre à l'aide des racines

Exemple 3 — Montrer que $P = (X-2)^8 + (X-1)^7 - 1$ est divisible par $Q = X^2 - 3X + 2$.

Exemple 4 — Montrer que $1 + X + X^2$ divise $X^{311} + X^{82} + X^{15}$.

3 Racines et degré

Théorème 3

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, non nul, et $n \in \mathbb{N}$. Si $\deg P = n$:

Exercice 3 — Démontrer le théorème.

SF 8 : utiliser les racines pour montrer qu'un polynôme P est nul :

•
•

• **Conséquence.** Si $P(a) = Q(a)$ en une infinité de valeurs $a \in \mathbb{K}$, alors $P = Q$ (*i.e.* P et Q ont mêmes coefficients).

Exemple 5 SF 8 — Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P\left(e^x\right) = e^{2x} + e^x + 1$. Calculer $P(-1)$ et $P(j)$

Exemple 6 SF 8 — Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \sin x$.

Exemple 7 SF 8 — Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X+1) = P(X)$. Montrer que P est constant.

Exemple 8 SF 8 — Trouver tous les $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant : **a)** $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) = n^2 + 1$ **b)** $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) = n^2 + (-1)^n$