- **Cadre.** $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé.

1 L'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Définition 1

La matrice identité de taille n est la matrice diagonale :

- **Remarque.** Pour toute $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$: 1. 2.

- **Remarque.** $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est :

Attention

2 Calculer les puissances d'une matrice carrée

- **Cadre.** Etant donnés $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $p \in \mathbb{N}$, on souhaite calculer A^p.
- **Rappel.** $A^0 = I_n$ (élément neutre)

Méthode 1 : par récurrence

Exemple 1 SF 1 *Matrice pleine de 1* — On considère la matrice : $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer J^2 puis montrer : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad J^p = 3^{p-1} J$

Méthode 2 : avec la formule du binôme

Théorème 1

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que : alors pour tout $p \in \mathbb{N}$

-
-

Attention Si $AB \neq BA$, alors, par exemple :

- **Remarque.** Toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ commute avec : • •

Exemple 2 SF 1 — Calculer l'expression de A^p pour $p \in \mathbb{N}$: **a)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Méthode 3 : à l'aide d'un polynôme annulateur

- **Notation.** Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. Pour toute $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note $P(A)$ la matrice $\sum_{k=0}^{d} a_k A^k \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Exemple 3 SF 1 — Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite calculer une expression de A^n où A est la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 et trouver $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(A) = 0$.
2. En déduire une expression de A^n en exploitant la division euclidienne de X^n par P.

3 Application aux systèmes de suites récurrentes

Exemple 4 SF 3 — On pose : $u_0 = 1$ et $v_0 = w_0 = 0$ puis pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + 3v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n + 3w_n \end{cases}$

Calculer explicitement u_n, v_n et w_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.