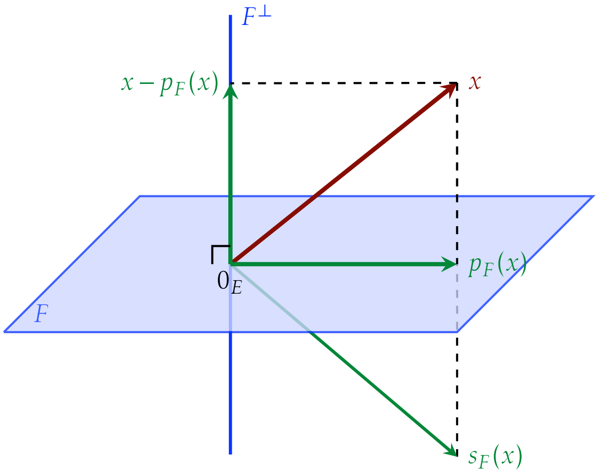
III Projection orthogonale sur un sous-espace

- **Cadre.** • E est un espace préhilbertien • F est un sous-e.v. de dimension finie de E. • On sait que $F \oplus F^{\perp} = E$.

1 Projecteurs orthogonaux, symétries orthogonales

Définition 1

- Le *projecteur orthogonal sur F*, noté p_F est le projecteur :
- La *symétrie orthogonale par rapport à F*, notée s_F, est la symétrie :



- **A retenir.** Le projeté de $x \in E$ est l'unique vecteur de E tel que :

$\boxed{p_F(x) \in F}$ et $\boxed{x - p_F(x) \in F^{\perp}}$ (cf. figure)

SF 9 : calculer le projeté – méthode 1 : à vue

♥ **Exercice 1** — Calculer le projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur le sous-e.v. F des matrices diagonales de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

Théorème 1 : Projeté en base orthonormée

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une b.o.n. de F. Pour tout $x \in E$:

Exercice 2 — Démontrer la formule ci-dessus.

SF 9 : calculer le projeté – méthode 3 : en b.o.n.

♥ **Exemple 1** — Dans $\mathbb{R}^4$ euclidien canonique, on pose : $F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0 \quad \text{et} \quad z + t = 0\right\}$.
Déterminer la matrice de p_F dans la base canonique.

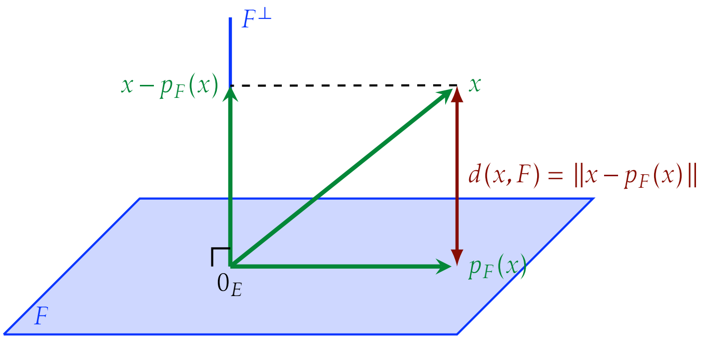
SF 9 : calculer le projeté – méthode 2 : avec une base quelconque

♥ **Exemple 2** — Calculer le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$ pour le produit scalaire $(P \mid Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$.

2 Distance à un sous-espace

Définition 2

Pour $x \in E$, la *distance de x à F* est $d(x, F) \underset{\text{déf.}}{=}$



Théorème 2 : Théorème d'approximation

Soit $x \in E$ et $y \in F$. Si $y \neq p_F(x)$:

En particulier : $\boxed{}$

- **Interprétation.** $p_F(x)$ est le vecteur de F le plus proche de x

Exercice 3 ♥ — Démontrer le théorème 2 *i.e.* montrer que pour $y \in F$ tel que $y \neq p_F(x)$: $\|x - y\| > \|x - p_F(x)\|$

Exercice 4 ♥ *Application en analyse* — Quels sont les réels a, b qui minimisent $I(a, b) = \int_0^1 (t^2 - (at + b))^2\,dt$?

3 Cas des hyperplans

- **Cadre.** • E est euclidien de dimension n. • H est un *hyperplan* de E *i.e.* un sous-e.v. de dimension $n - 1$.
- **Vocabulaire.** On appelle *vecteur normal* à H tout vecteur non nul de $H^{\perp}$ ($H^{\perp}$ est un droite vectorielle)

Théorème 3

Soit $x \in E$.
Soit a est un vecteur normal à H : • •

Exercice 5 — Démontrer ces deux formules.

Exemple 3 SF 12 — Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $P = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0\right\}$ et $\vec{u} = (2, 2, 1)$. Calculer $d(\vec{u}, P)$

Exemple 4 SF 12 — Dans $\mathbb{R}_n[X]$ muni de $(P \mid Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$, on pose $H = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \sum_{k=0}^{n} P(k) = 0\right\}$.
Calculer $d(X^n, H)$