I Produit scalaire

- **Cadre.** Dans tout le chapitre E est un espace vectoriel **réel**.

1 Définitions

Définition 1

Un produit scalaire sur E est une *forme bilinéaire symétrique définie positive i.e.* une application :

- *Bilinéaire*. Pour tous $x, x', y, y' \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
  - •
  - •
- *Symétrique*.
- *Définie positive* : •   •

- **Notation.** Le produit scalaire $(x \mid y)$ est aussi noté $\langle x|y\rangle$ ou encore $x \cdot y$
- **Vocabulaire.** •On appelle *espace préhilbertien réel* tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire
  •On appelle *espace euclidien* tout espace préhilbertien réel de dimension finie
- **Remarque.** La bilinéarité du produit scalaire assure que :

2 Exemples de référence

- **Rappel.** Le produit scalaire de la géométrie est défini pour $\vec{u} = (x, y)$ et $\vec{v} = (x'y')$ dans $\mathbb{R}^2$ par : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

Exemple 1 $\mathbb{R}^n$ — Produit scalaire canonique défini pour tous $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_1)$ par $(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

Exemple 2 $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$ — Produit scalaire intégral défini pour tous $f, g \in \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$ par $(f \mid g) = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$

Exemple 3 $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ — Produit scalaire canonique défini pour $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ par $(A \mid B) = \operatorname{tr}(A^\top B) = \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} a_{i,j} b_{i,j}$

Exercice 1 — Soit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *distincts*. Montrer que $(P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 1

Soit E un espace préhilbertien. Pour tous $x, y \in E$:

Exercice 2 ♥ — Démontrer le théorème dans le cas où $y \neq 0$ en considérant la fonction $P : t \mapsto (x + ty \mid x + ty)$

SF 4 : Utiliser Cauchy-Schwarz pour établir des inégalités

Exercice 3 ♥ — Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Montrer que : $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$. Dans quels cas y-a-t-il égalité ?

Exercice 4 ♥*Ex. 76.2, banque INP* — Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+^*$ continue. Montrer : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t \geq (b-a)^2$

4 Norme associée à un produit scalaire : E est un espace préhilbertien .

Définition 2

Soient $x, y \in E$: • La *norme* de x est :   • La *distance de x à y* est le réel :

- **Vocabulaire.** On dit que $x \in E$ est unitaire si : $\|x\| = 1$.

Exercice 5 *Inégalité triangulaire* — Montrer que pour $x, y \in E$ non-nuls : $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
Montrer qu'il y a égalité si et seulement si x et y sont colinéaires de même sens.

Exemple 4 — On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini par $(P \mid Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$.
a) Calculer $\|X^n\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ **b)** Calculer la distance de X^2 à 1.

Exemple 5 — Dans $\mathscr{C}\big([0, 2\pi], \mathbb{R}\big)$ muni du produit scalaire intégral, on considère $f_1 : t \mapsto \cos t$ et $f_2 : t \mapsto \sin t$
a) Calculer $\|f_1\|$ et $\|f_2\|$ **b)** Calculer la distance de f_1 à f_2.