1 Définition du produit

Définition 1

Soient $A \in \mathscr{M}_{\boxed{n,p}}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{\boxed{p,q}}(\mathbb{K})$
On définit la matrice $AB \in \mathscr{M}_{\boxed{n,q}}(\mathbb{K})$ par :

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!], \quad (AB)_{i,j} =$

Attention à la condition de compatibilité :

Exemple 1 — Calculer AB : **a)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

• **Remarque.** Pour $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1, \dots, C_p$ et $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$: $AX =$

2 Particularités et propriétés du produit

• **Remarque.** Le produit matriciel n'est pas commutatif.
• **Remarque.** On peut avoir : • $AB = 0$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$ • $A^n = 0$ avec $A \neq 0$

Théorème 1 : Propriétés

1. *Bilinéarité.* Pour tous $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C, D \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:
   •
   •
2. *Associativité* Pour tous $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$:
3. *Transposition* Pour tous $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$:

Exercice 1 — Démontrer la propriété d'associativité.

3 Produits de matrices carrées particulières

Théorème 2 : Matrices diagonales

Pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$:

Théorème 3 : Matrices triangulaires

1. Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.
2. Le produit de deux matrices triangulaires inférieures est une matrice triangulaire inférieure.

Exercice 2 ♥ — Démontrer le premier point *i.e.* le cas de deux matrices triangulaires supérieures

Théorème 4 : Matrices élémentaires

Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, pour tous $i, j, k, \ell \in [\![1,n]\!]$: $\quad E_{i,j}E_{k,\ell} =$

Exercice 3 ♥ — **a)** Démontrer la formule **b)** ♥♥ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $i, j \in [\![1,n]\!]$. Calculer $AE_{i,j}$ et $E_{i,j}A$.

4 Produit par blocs

Théorème 5 : Produit de matrices par bloc

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B \in \mathscr{M}_{n',p}(\mathbb{K}), C \in \mathscr{M}_{n,p'}(\mathbb{K}), D \in \mathscr{M}_{n',p'}(\mathbb{K}), A' \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}), B' \in \mathscr{M}_{p',q}(\mathbb{K}), C' \in \mathscr{M}_{p,q'}(\mathbb{K}), D' \in \mathscr{M}_{p',q'}(\mathbb{K})$

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A' & C' \\ B' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + CB' & AC' + CD' \\ BA' + DB' & BC' + DD' \end{pmatrix}$$

Exemple 2 — Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer M^2 à l'aide de la formule qui précède.