- **Cadre.** • a, b et c sont des entiers relatifs.

1 Définition

Définition 1

On dit que a et b sont premiers entre eux si :

Ou encore si :

Exemple 1 — 9 et 14 sont premiers entre eux mais 9 et 12 ne le sont pas.

SF 8 : Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ une équation faisant intervenir $x \wedge y$ ou $x \vee y$

Si $a \wedge b = d$ on peut écrire : $\boxed{a = da' \quad \text{et} \quad b = db' \quad \text{où :} \quad a' \wedge b' = 1}$

Exemple 2 — Résoudre le système suivant d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{N}^2$: $\begin{cases} x \wedge y = 10 \\ x \vee y = 120 \end{cases}$

Exemple 3 — Résoudre l'équation $x \wedge y = x^2 - y^2 - 2$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{N}^2$.

2 Théorème de Bézout et lemme de Gauss

Théorème 1 : Théorème de Bézout

Il y a équivalence entre :

i) a et b sont premiers entre eux *ii)*

Exercice 1 — Démontrer cette équivalence

Théorème 2 : Lemme de Gauss

- **Attention** . Si $a \wedge b \neq 1$: $a \mid bc \quad \cancel{\Longrightarrow} \quad a \mid b \quad \text{ou} \quad a \mid c$. Par exemple :

Exercice 2 — Démontrer le lemme de Gauss à l'aide du théorème de Bézout.

SF 7 : Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation diophantienne $ax + by = c$ où $a \wedge b = 1$

Exemple 4 — Trouver tous les $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $7x + 12y = 3$.

3 Conséquences classiques

Théorème 3 : Entier premier avec un produit

- **Extensions.** • Si : $a \wedge b_1 = 1, \ldots, a \wedge b_n = 1$ alors : $a \wedge (b_1 \ldots b_n) = 1$
  • Si $a \wedge b = 1$ alors pour tous $m, n \in \mathbb{N}$: $a^n \wedge b^m = 1$

Exercice 3 *Ex. 86.1, banque INP* — Démontrer le théorème à l'aide du théorème de Bézout.

Théorème 4 : Divisibilité par deux entiers premiers entre eux

- **Extension.** Si $a_1, \ldots, a_n$ divisent c et sont premiers entre eux deux à deux alors leur produit $a_1 \ldots a_n$ divise c.

Attention Si $a \wedge b \neq 1$: $a \mid c \quad \text{et} \quad b \mid c \quad \cancel{\Longrightarrow} \quad ab \mid c$. Par exemple :

Exercice 4 *Ex. 94.2, banque INP* — Démontrer ce résultat à l'aide du lemme de Gauss.

Exercice 5 *Forme irréductible d'un rationnel* — Soit $r \in \mathbb{Q}$.
Montrer qu'il existe un unique couple $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que : $r = \dfrac{p}{q} \quad \text{et} \quad p \wedge q = 1$