III Pratique de la décomposition en éléments simples

- **But.** Etant donnée $F \in \mathbb{K}(X)$, on souhaite calculer les coefficients de sa décomposition en éléments simples.

SF 11 : Les étapes pour décomposer F en élément simples

1. *Partie entière :*
2. *Pôles et multiplicités :*
3.

1 Cas des pôles simples

- **Cadre.** a est un pôle simple de F, la D.E.S. est de la forme :
- **Objectif.** On cherche à calculer le coefficient α.

La méthode du « cache »

Exemple 1 — Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$: **a)** la fraction $\frac{1}{X^2-1}$ **b)** la fraction $\frac{X^3+2}{X^2-X}$

Exemple 2 — Que donne la méthode du cache pour décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction $\dfrac{1}{X^5-1}$?

Théorème 1

Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$, avec $P \wedge Q = 1$, admettant a pour pôle simple : $F = \dfrac{\alpha}{X-a} + G$ où a n'est pas pôle de G.

Alors :

Exercice 1 — Démontrer le théorème précédent.

Exemple 3 ♥ — Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction $\dfrac{1}{X^n-1}$.

2 Cas général

- **Cadre.** Les pôles de F sont $a_1, \dots, a_k$, de multiplicités $m_1, \dots, m_k$.
- **Objectif.** Déterminer la décomposition en éléments simples de F.

SF 12 : Calculer les coefficients de la décomposition en éléments simples

- *Méthode du « cache ».*
- *Méthode* $\lim\limits_{x \to +\infty} xF(x)$.
- *Evaluer en des points particuliers.*

Exemple 4 — Calculer les décompositions en éléments simples suivantes dans $\mathbb{R}(X)$ de :

a) $\dfrac{X+3}{(X+1)^2(X+2)}$ **b)** $\dfrac{X^3}{(X-1)^2(X-2)^2}$ **c)** $\dfrac{25}{(X-1)^2(X^2+4)}$ **d)** $\dfrac{3(X-2)^2}{X(X-1)^2(X^2+X+1)}$ **e)** $\dfrac{X^2}{(X^2-1)^2}$

Exemple 5 — Calculer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de $\dfrac{2n}{X^{2n}-1}$.

3 Décomposition de $\frac{P'}{P}$

Théorème 2

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, non constant, soient $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$ les racines de P et $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ leurs ordres :

Exercice 2 — Etablir la décomposition donnée par le théorème.

Exemple 6 SF 13 ♥ — Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction $\dfrac{X^{n-1}}{X^n-1}$.