4 Définition du PPCM

Définition 1

Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$. On appelle PPCM de a et b le :

On le note :

- **Remarque.** Par convention, pour tout $a \in \mathbb{Z}$: $a \vee 0 = 0 \vee a =$

5 Propriétés du PPCM

Théorème 1 : PPCM et multiples communs

Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$. Pour tout $m \in \mathbb{Z}$:

- **Remarque.** La propriété du théorème reste vraie si a ou b est nul.

Théorème 2 : Factorisation

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$:

Théorème 3 : Relation PGCD-PPCM

Soient $a, b \in \mathbb{N}$:

- **Remarque.** Plus généralement, pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$: $(a \wedge b) \times (a \vee b) = |ab|$

Preuve du théorème 1.

Soit $m \in \mathbb{Z}$.

- *Supposons que :* $a \vee b \mid m$
  On sait que $a \mid a \vee b$ et $a \vee b \mid m$
  Ainsi (par transitivité) : $a \mid m$
  De même : $b \mid m$
- *Supposons que :* $a \mid m$ *et* $b \mid m$
  On écrit la division euclidienne de m par $a \vee b$: $m = (a \vee b)q + r$ pour certains $q, r \in \mathbb{Z}$ tels que $0 \leq r < a \vee b$.
  Montrons que $r = 0$.
  Notons que :
  - $r = m - (a \vee b)q$ est un multiple commun à a et b (c'est une combinaison linéaire de $a \vee b$ et m, tous deux multiples de a et b).
  - $0 \leq r < a \vee b$ et $a \vee b$ est le plus petit multiple strictement positif commun à a et b.

  Par conséquent : $r = 0$.
  Ainsi $m = (a \vee b)q$ est un multiple de $a \vee b$.

Preuve du théorème 2.

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$. Si k est nul, alors l'égalité à démontrer se réduit à $0 = 0$ et est donc vraie.
On suppose donc $k \neq 0$. Posons :

$$m = a \vee b \quad \text{et} \quad M = ka \vee kb$$

et montrons que : $M = km$.

- *Montrons que $M \mid km$*
  On sait que $ka \mid km$ et $kb \mid km$.
  Par le théorème 1 : $M \mid km$.
- *Montrons que $km \mid M$.*
  On sait déjà que M est un multiple de k (car $k \mid ka$ et $ka \mid M$).
  Soit $q \in \mathbb{N}$ tel que $M = kq$.
  Il sufit de montrer que $m \mid q$.
  Or ka divise $M = kq$.
  Donc : a divise q (car $k \neq 0$).
  De même : $b \mid q$.
  Par le théorème 1 : $m = a \vee b \mid q$.

Puisque M et km sont positifs, ce qui précède assure que $M = km$.

Preuve du théorème 3.

Soient $a, b \in \mathbb{N}$. Posons :

$$d = a \wedge b \quad \text{et} \quad m = a \vee b$$

et montrons que : $md = ab$.

- *Montrons que $ab \mid md$*
  Par factorisation :
  $$md = m(a \wedge b) = ma \wedge mb$$
  Or $ab \mid ma$ et $ab \mid ma$.
  Ainsi : ab divise $ma \wedge mb = md$.
- *Montrons que $md \mid ab$*
  Par factorisation :
  $$md = d(a \vee b) = da \vee db$$
  Or : $da \mid ab$ et $db \mid ab$.
  Ainsi $md = da \vee db$ divise ab.

Puisque md et ab sont positifs, ce qui précède assure que $md = ab$.