1 Le groupe symétrique

- **Rappels.** Dans tout le chapitre n est un entier naturel non nul.
  - Une permutation de $[\![1,n]\!]$ est :
  - On note S_n l'ensemble de ces permutations. $(S_n,\circ)$ est :
  - $\mathrm{Card}(S_n) =$
- **Représentation d'une permutation.** Une permutation $\sigma \in S_n$ est représentée par un tableau. Par exemple, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ est la permutation de S_4 définie par :

Exemple 1 *Composée, inverse* — Soient $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ et $\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer : $\sigma' \circ \sigma$ et σ^{-1}.

Définition 1

Une transposition de S_n est une permutation τ qui *échange deux éléments et laisse les autres invariants* i.e. :

Exemple 2 — $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ est la transposition :

- **Remarque.** Toute trasposition (i,j) vérifie : • •

Définition 2

Un cycle est une permutation $\sigma \in S_n$ pour laquelle il existe $x_1,\dots,x_p$ distincts ($p \geq 2$) tels que :

-
-

On note alors :

Exemple 3 — Soient $x_1,\dots,x_p \in [\![1,n]\!]$, distincts. Combien peut-on former de cycles de support $\{x_1,\dots,x_p\}$?

Exercice 1 — Deux cycles $c = (x_1,\dots,x_p)$ et $c' = (y_1,\dots,y_q)$ sont dits disjoints si : $\{x_1,\dots,x_p\} \cap \{y_1,\dots,y_q\} = \varnothing$. On suppose que c et c' sont disjoints, montrer que : $c \circ c' = c' \circ c$.

2 Décompositions d'une permutation

Exercice 2 — Soit $\sigma \in S_n$. On définit sur $[\![1,n]\!]$ une relation $\sim$ par : $x \sim y \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid y = \sigma^k(x)$.

1. Montrer la relation « $\sim$ » est une relation d'équivalence sur $[\![1,n]\!]$
2. Soit $x \in [\![1,n]\!]$. On pose $\mathcal{O}_x = \{\sigma^k(x) ; k \in \mathbb{Z}\}$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{O}_x = \{x, \sigma(x), \dots, \sigma^{p-1}(x)\}$.
3. Montrer qu'il existe des cycles disjoints $c_1,\dots,c_r$ tels que $\sigma = c_1 \circ \cdots \circ c_r$.

Théorème 1

Toute permutation est une composée de cycles disjoints. La décomposition est unique à l'ordre près

Exemple 4 *La pratique* — Décomposer $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 9 & 5 & 2 & 1 & 6 & 8 & 7 & 10 & 4 \end{pmatrix}$ en cycles disjoints.

Exemple 5 — Dans S_5 justifier : $(1,3,5) = (1,3) \circ (3,5)$.

- **Retenir.** « Relation de Chasles » pour décomposer un cycle : $\boxed{(x_1,x_2,\dots,x_p) = (x_1,x_2) \circ (x_2,x_3) \circ \cdots \circ (x_{p-1},x_p)}$

Théorème 2

Exemple 6 *et méthode générale* — Ecrire la permutation de l'exemple 4 comme une composée de transpositions.

3 Signature

Théorème 3

Il existe un unique morphisme de groupe $\varepsilon : S_n \to \{-1,1\}$ tel que :

1. Pour toute transposition τ :
2. Pour tous $\sigma,\sigma' \in S_n$:

En pratique : trouver la signature de σ

- **Méthode 1.** *Avec la décomposition en transpositions.* Si σ est la composée de k transpositions :$\varepsilon(\sigma) = (-1)^k$.
- **Méthode 2.** *Avec la décomposition en cycles.* Si c est de longueur p, alors $\varepsilon(c) = (-1)^{p-1}$.

Exemple 7 — Calculer la signature de la permutation σ de l'exemple 4.