II Orthogonalité dans un espace préhilbertien E

1 Vecteurs orthogonaux

Définition 1

Deux vecteurs $x, y \in E$ sont dits *orthogonaux* lorsque :

Exemple 1 — **1.** Dans $E = \mathscr{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$, montrer que $f : t \mapsto \cos t$ et $g : t \mapsto \sin t$ sont orthogonales
2. Dans $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ sont orthogonales.

Théorème 1 : Théorème de Pythagore

Deux vecteurs $x, y \in E$ sont orthogonaux ssi :

Exercice 1 *SF 3* — Démontrer l'équivalence précédente à l'aide d'une identité remarquable.

Définition 2

Une famille $(u_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est dite :

• Orthogonale si : • Orthonormale si :

Exemple 2 — Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, la base canonique $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est orthonormale.

Exemple 3 ♥ — Dans $\mathscr{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$, muni du produit scalaire $(f \mid g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, on considère la famille de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $f_n : t \mapsto \sin(nt)$. Montrer que cette famille est orthonormale.

Exemple 4 — Soit $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ *distincts*. Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ pour $(P,Q) \mapsto \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$

Théorème 2 : (Pythagore)

Si $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille orthogonale, alors :

Exercice 2 *SF 2* — Démontrer cette égalité.

Théorème 3

Toute famille orthogonale de vecteurs non-nuls est :

Exercice 3 — Démontrer le théorème.

2 Coordonnées dans une base orthonormale

• **Cadre.** • E est euclidien • $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E • $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ • $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$

Exercice 4 — Montrer **a)** $x_i = (x \mid e_i)$ **b)** $(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ **c)** $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

• **Remarque.** Si X et Y sont les colonnes des coordonnées de x et y :

Exercice 5 ♥ — Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On pose $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} f$. Montrer que pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$: $a_{i,j} = \big(f(e_j) \mid e_i\big)$.

3 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace

Définition 3

Soit A une partie de E. L'orthogonal de A est l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de A

• $A^\perp \underset{\text{déf.}}{=}$ •

Exemple 5 — **a)** $E^\perp =$ **b)** $\{0\}^\perp =$ **c)** $A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$

Exercice 6 ♥ — Démontrer que $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

SF 7 : Déterminer $F^\perp$ lorsque F est donné sous forme de « Vect »

Si $F = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ alors, pour tout $x \in E$: $x \in F^\perp \iff (x \mid u_1) = 0,\ (x \mid u_2) = 0, \dots, \big(x \mid u_p\big) = 0$

Exemple 6 — **1.** Déterminer $\mathbb{R}_1[X]^\perp$ pour le p.s. défini sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $(P|Q) = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$
2. ♥ *Ex. 92.3, banque INP* Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ on note F l'ensemble des matrices diagonales. Déterminer $F^\perp$.

Théorème 4

Soit F un sous-espace de dimension finie de E : • •

En conséquence, si E est de dimension finie :

Exercice 7 — Démontrer le théorème.