# IV Opérations sur les développements limités : la pratique

## 1 Combinaisons linéaires

On suppose ici que $f$ et $g$ admettent un $\mathrm{DL}_n$ en $a$.

**SF 2 : Obtenir un $\mathrm{DL}_n$ de $\lambda f + \mu g$**

Les $\mathrm{DL}_n$ de $f$ et $g$ se combinent termes à termes et fournissent un $\mathrm{DL}_n$ de $\lambda f + \mu g$

**Exemple 1** — Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\varphi(x) = \dfrac{1}{1-x} - e^x$.

## 2 Produit

**SF 3 : Obtenir un $\mathrm{DL}_n$ de $fg$**

Les $\mathrm{DL}_n$ de $f$ et $g$ fournissent un développement de $fg$ au moins d'ordre $n$.

**Exemple 2** — **1.** Donner un développement limité d'ordre 3 en 0 de $\varphi(x) = \dfrac{e^x}{(1+x)^2}$.

**2.** Donner un développement limité d'ordre 2 en 0 de $\varphi(x) = e^x \ln(1+x)$.

**En pratique : le « gain d'ordre »**

De manière générale, lorsqu'on cherche un développement limité en 0 à l'ordre $n$ de $fg$ :

- si $f$ admet un $\mathrm{DL}_n$ de la forme $f(x) \underset{x\to 0}{=} a_p x^p + \dots$ alors il suffit de développer $g$ à l'ordre $n-p$
- si $g$ admet un $\mathrm{DL}_n$ de la forme $g(x) \underset{x\to 0}{=} b_q x^q + \dots$ alors il suffit de développer $f$ à l'ordre $n-q$

**Exemple 3** —

**1.** Déterminer un développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\varphi(x) = (\tan x)^2 \sin x$.

**2.** Déterminer un développement limité à l'ordre 6 en 0 de $\psi(x) = (\operatorname{ch} x - 1)\ln(1+x)$.

## 3 Composition et quotients

**SF 4 : Obtenir un $\mathrm{DL}_n$ en 0 d'une composée**

**Exemple 4** *Composition* — **1.** Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\varphi(x) = e^{\sin x}$.

**2.** Déterminer un développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\varphi(x) = \sqrt{\cos x}$.

**En pratique : pour obtenir un $\mathrm{DL}_n$ de $\frac{1}{f}$**

On essaie de se ramener à $\dfrac{1}{1+u(x)}$ avec $u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$

**Exemple 5** *SF 5* — **1.** Déterminer un développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\varphi(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.

**2.** Déterminer un développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\tan x$.

**3.** Déterminer un développement limité à l'ordre 3 de $\psi(x) = \dfrac{1}{1+e^{2x}}$.

**En pratique : obtenir un $\mathrm{DL}_n$ en 0 de $\frac{f}{g}$ lorsque $g(0) = 0$**

Si $g$ admet un $\mathrm{DL}_n$ de la forme : $g(x) \underset{x\to 0}{=} b_q x^q + \dots$ , il suffit de :

1. Développer $f$ et $g$ à l'ordre $n+q$. 2. Simplifier le quotient par $x^q$ (y compris les petits $o$)

On est ainsi ramené à un DL de la forme $\dfrac{N(x)}{1+u(x)} = N(x) \times \dfrac{1}{1+u(x)}$.

**Exemple 6** —

**1.** Déterminer un développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\varphi(x) = \dfrac{e^{x^2}-1}{\sin(x^2)}$.

**2.** Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\psi(x) = \dfrac{\operatorname{ch} x - 1}{\ln(1+x)}$.

## 4 Développement limité en un point $a$ autre que 0

**SF 7 : On « pose » $g(h) = f(a+h)$**

• On effectue un $\mathrm{DL}_n$ en 0 de $g : h \mapsto f(a+h)$ • On « revient » à $x$ en posant « $h = x - a$ »

**Exemple 7** — **1.** Déterminer un développement limité à l'ordre 3 au point $\frac{\pi}{3}$ de $\cos x$.

**2.** Déterminer un développement limité à l'ordre 2 au point 2 de $\ln x$.