II Justifier la dérivabilité

1 Opérations sur les dérivées

Théorème 1 : Opérations algébriques

Soient u, v deux fonction dérivables en a et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- *Linéarité :* $\lambda u + \mu v$ est dérivable en a et $(\lambda u + \mu v)'(a) = \lambda u'(a) + \mu v'(a)$,
- *Produit :* uv est dérivable en a et $(uv)'(a) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$.
- *Quotient :*Si $v(a) \neq 0$, alors $\frac{u}{v}$ est dérivable en a et $\left(\frac{u}{v}\right)'(a) = \frac{u'(a)v(a) - u(a)v'(a)}{v^2(a)}$, en particulier $\left(\frac{1}{v}\right)'(a) = -\frac{v'(a)}{v^2(a)}$

Exercice 1 — Etablir la formule pour le produit.

Théorème 2 : Composition

Soient $u : I \to \mathbb{R}$ et $v : J \to \mathbb{R}$. On suppose u à valeurs dans J. Si u est dérivable en a et si v est dérivable en $u(a)$ alors $v \circ u$ est dérivable en a et :

Exercice 2 — Démontrer la formule précédente dans le cas où $u(x) \neq u(a)$ au voisinage de a (a exclu).

- **Cas particuliers à savoir.** Les dérivées des composées usuelles u^α, e^u, $\ln(u)$, $\cos u$, $\sin u$, ... (*cf tableau*).

SF 1 : Justifier que f est dérivable

Exemple 1 — Justifier la dérivabilité de **a)** $f : x \mapsto \sqrt{(x-1)\ln x}$ sur $[1, +\infty[$ **b)** $f : x \mapsto \mathrm{Arcsin}(1-x^2)$ sur $[0, \sqrt{2}[$

2 Dérivation des fonctions réciproques

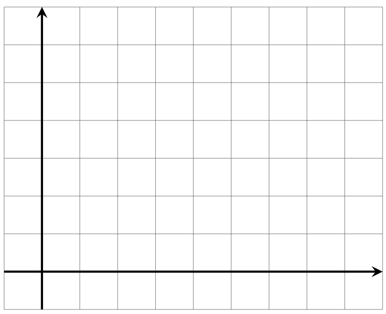
- **Cadre.** f est continue sur I et strictement monotone
- **Rappel.**

Théorème 3

On pose : $b = f(a)$ (donc : $a = f^{-1}(b)$). On suppose que f est dérivable en a et que

Alors f^{-1} est dérivable en b et :

Exercice 3 — Démontrer la formule précédente.



- **Rappel.** Ce théorème justifie la dérivabilité de Arccos et Arcsin sur $]-1, 1[$ et la dérivabilité de Arctan sur $\mathbb{R}$.

Attention
- Arccos et Arcsin ne sont pas dérivables en -1 et 1.
- Plus généralement, si $f'(a) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en b.

3 Théorème de la limite de la dérivée

Théorème 4 : Théorème de la limite de la dérivée

On suppose que : •f est continue sur $[a, b[$ •f est dérivable sur $]a, b[$

- **Remarque.** Même conclusion si :• f est continue sur $]a, b]$ • f est dérivable sur $]a, b[$ • $\lim\limits_{x \to b^-} f'(x) = \ell$
- **Remarque.** Même conclusion si : • f est continue sur I • f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$ • $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell$
- **Conséquence.** Lorsque ℓ est finie :

Exemple 2 SF 1 — Etudier la dérivabilité en 0 de la fonction $f : x \mapsto \mathrm{Arcsin}(1 - x^2)$ définie sur $[0, \sqrt{2}]$.

Exercice 4 *Ex. 4.3, banque INP* ♥ — A l'aide de la fonction f définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ pour $x > 0$ montrer que l'implication : (f est dérivable en a) $\Longrightarrow$ (f' admet une limite finie en a) est fausse.