I Notion de matrice

1 L'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition 1

- On appelle matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute famille de $n \times p$ éléments de $\mathbb{K}$, présentée sous la forme d'un tableau à n lignes et p colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

- On note $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ ou simplement $A = (a_{ij})$
- On dit que A est de taille (n,p).
- L'ensemble des matrices de taille (n,p) est noté $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- Si $n = p$ on dit que la matrice est carrée et on note $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ au lieu de $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

- **Remarque.** Dans la suite, pour $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, le coefficient en position (i,j) sera noté $a_{i,j}$ (et aussi parfois $A_{i,j}$)

Exemple 1 — Ecrire explicitement la matrice $A = (ij^2)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$.

Définition 2

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit la matrice transposée $A^\top \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ par : $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!], \quad (A^\top)_{i,j} =$
Autrement dit, les lignes de $A^\top$ sont les colonnes de A et inversement.

- **Remarque.** $(A^\top)^\top =$

Exercice 1 — **a)** Pour $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^\top =$ **b)** Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $X^\top =$

- **Vocabulaire et notations.**

• Matrice ligne :

• Matrice colonne :

• Matrice nulle de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

- **Matrices carrées particulières .**
  - $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est *diagonale* si $a_{i,j} = 0$ pour :
  - $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est *triangulaire supérieure* si $a_{i,j} = 0$ pour :
  - $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est *triangulaire inférieure* si $a_{i,j} = 0$ pour :

Définition 3

$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est : • *symétrique* si • *antisymétrique* si

Exemple 2 — **a)** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 6 \\ -4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ est symétrique. **b)** $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

2 Combinaisons linéaires de matrices

Définition 4

Soient $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On définit la matrice $\lambda A + \mu B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par : $\lambda A + \mu B \underset{\text{déf.}}{=}$

- **Retenir.** Les C.L. s'effectuent coefficient par coefficient, par ex. : $2\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$

- **Remarque.** La transposition est linéaire :

Définition 5

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$.
La *matrice élémentaire* $E_{i,j}$ est la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont le coefficient d'indice (i,j) vaut 1 et tous les autres 0.

Exemple 3 — Dans $\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{K})$, écrire les matrices $E_{i,j}$.

Théorème 1

Toute matrice A de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est :

- **Remarque.** Une matrice triangulaire supérieure $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire des $E_{i,j}$ pour :