I Négligeabilité, domination

1 Définitions

Définition 1

- On dit que f est *négligeable* devant g au voisinage de a si :

  On note : $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ ou $f \underset{a}{=} o(g)$. (« f est un petit o de g »)

- On dit que f est *dominée* par g au voisinage de a si :

  On note :

- **Cas des suites .** Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si $v_n \neq 0$ APCR, on dit que u est négligeable devant v si $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exemple 1 — Justifier : **a)** $x^2 \underset{x\to+\infty}{=} o(x^3)$ **b)** $x^3 \underset{x\to 0}{=} o(x^2)$ **c)** $\dfrac{\ln x}{x^3} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ **d)** $\dfrac{1+\cos x}{x^2} \underset{x\to 0}{=} O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ **e)** $2^n \underset{n\to+\infty}{=} o(3^n)$

Théorème 1 : Croissances comparées en $+\infty$

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ • Si $\alpha < \beta$: $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=}$ • Si $\alpha > 0$: $(\ln x)^\beta \underset{x\to+\infty}{=}$ • Si $\beta > 0$: $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=}$

Théorème 2 : Croissances comparées en 0

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. • Si $\alpha < \beta$: $x^\beta \underset{x\to 0}{=}$ • Si $\alpha > 0$: $|\ln x|^\beta \underset{x\to 0}{=}$

2 Règles de calcul

Théorème 3 : Opérations sur les o ou les O

1. *Combinaisons linéaires.* Si $f_1 \underset{a}{=} o(g)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g)$ alors pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:
2. *Transitivité.* Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et si $g \underset{a}{=} o(h)$, alors :
3. *Produit.* Si $f_1 \underset{a}{=} o(g_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g_2)$ alors :
4. *Produit par une fonction.* Si $f \underset{a}{=} o(g)$ alors :

- **Remarque.** On dispose des mêmes résultats en remplaçant « o » par « O ».

Exercice 1 — Démontrer les points 1 et 2 du théorème en revenant à la définition de « o ».

Exemple 2 — $3 + x^2 + x^3 + 5\ln x + x^{103} \underset{x\to+\infty}{=} o$

Exemple 3 — On admet que : $\sin x \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$ et $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + o(x)$.
Que dire de : **a)** $e^x + 2\sin x$? **b)** $e^x \sin x$?

Théorème 4 : Fonctions de limite nulle

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \iff$$

Exercice 2 — Démontrer l'équivalence en revenant à la définition de « o ».

- **Remarque.** $f(x) \underset{x\to a}{=} O(1)$ signifie :

Théorème 5 : Changement de variable

Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ et si u est une fonction telle que $u(t) \underset{t\to\alpha}{\longrightarrow} a$ alors :

Exercice 3 — Démontrer le théorème en utilisant une composition de limites.

Exemple 4 — On admet : $\sin x \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$. Que dire de : **a)** $\sin(t^2)$? **b)** $\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$? **c)** $\sin(e^t)$?