II Méthodes directes pour le calcul de primitives

1 Primitives de référence : deux tableaux à connaître

- Le premier tableau regroupe les primitives des fonctions usuelles.
- Pour le second tableau : la formule de dérivation des fonctions composées $(F \circ u)' = u' \times (F' \circ u)$, lue « à l'envers », permet de voir que, si F est une primitive de f, alors une primitive de $u' \times (f \circ u)$ est $F \circ u$.

Exemple 1 SF 3 — Déterminer une primitive de :
a) $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$ **b)** $t \mapsto \dfrac{1}{t \ln t}$ **c)** $x \mapsto \dfrac{x^2}{1+x^6}$ **d)** $x \mapsto \dfrac{x^5}{1+x^6}$ **e)** $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}}$ **f)** $x \mapsto \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$

2 Primitivation d'expressions trigonométriques

SF 4 : Primitives de $t \mapsto \cos^p t \sin^q t$, où $p, q \in \mathbb{N}$

La est une méthode générale pour calculer ce type de primitives.

Exemple 2 — **1.** *Ex. 31.1, banque INP*. Calculer une primitive de $x \mapsto \cos^4 x$
2. Déterminer une primitive de $x \mapsto \sin^2 x \cos x$ de deux façons différentes.

3 Utilisation des complexes

SF 5 : Primitives de $x \mapsto e^{ax} \cos bx$ et $x \mapsto e^{ax} \sin bx$

On utilise les nombres complexes, par exemple pour calculer une primitive de $x \mapsto e^{ax} \cos bx$

1.

2.

3.

Exemple 3 — Déterminer une primitive des fonctions : **a)** $f : x \mapsto e^x \cos(2x)$. **b)** $g : x \mapsto e^{-3x} \sin(2x)$

4 Primitive de $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$

- **Principe.** Tout dépend du nombre de racines réelles de ax^2+bx+c donc du signe du discriminant $\Delta = b^2-4ac$.

Exemple 4 SF 6 — Trouver une primitive sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-3, \frac{1}{2}\right\}$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2x^2+5x-3}$.

Exemple 5 SF 7 — Trouver une primitive sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{4x^2+4x+1}$.

Théorème 1 : Le trinôme n'a pas de racine réelle ($b^2 - 4ac < 0$)

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+a^2}$ est :

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{(x+\alpha)^2+\beta^2}$ est :

Exemple 6 SF 8 — Calculer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$

Bilan : primitiver $f : x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$

On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Fonction f	$x \mapsto \dfrac{1}{a(x-r_1)(x-r_2)}$	$x \mapsto \dfrac{1}{a(x-r)^2}$	$x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$
	Méthode du « cache »		Mise sous forme canonique
Fonction f	$x \mapsto \dfrac{A}{x-r_1} + \dfrac{B}{x-r_2}$		$x \mapsto \dfrac{1}{a\left((x+\alpha)^2+\beta^2\right)}$
Primitive	$x \mapsto A \ln\lvert x-r_1\rvert + B \ln\lvert x-r_2\rvert$	$x \mapsto \dfrac{-1}{a(x-r)}$	$x \mapsto \dfrac{1}{a\beta} \operatorname{Arctan} \dfrac{x+\alpha}{\beta}$