II Méthodes de calcul des déterminants

1 Par opérations élémentaires

Théorème 1 : Effets des opérations élémentaires

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

i) L'opération $L_i \longleftarrow \lambda L_i$ ou $C_j \longleftarrow \lambda C_j$:

ii) L'opération $L_i \longleftrightarrow L_j$ ou $C_i \longleftrightarrow C_j$:

iii) L'opération $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$ ou $C_j \longleftarrow C_j + \lambda C_i$:

SF 5 : calculer un déterminant par opérations élémentaires

La méthode du pivot permet de se ramener à un déterminant triangulaire et donc simple à calculer.

Exemple 1 SF 5 — Calculer **a)** $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} a^2 & ab & ac & ad \\ a^2 & b^2 & bc & bd \\ a^2 & b^2 & c^2 & cd \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}$ **d)** $\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & \dots & & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & & b & a \end{vmatrix}$

2 Par développement suivant une ligne ou une colonne

• **Vocabulaire : mineurs d'une matrice.** Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $i, j \in [\![1, n]\!]$.
On note $A_{i,j}$ la matrice de $\mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A et on pose $\Delta_{i,j} = \det A_{i,j}$

Théorème 2

• *Développement par rapport à la colonne j.* Pour $j \in [\![1, n]\!]$:

• *Développement par rapport à la ligne i.* Pour $i \in [\![1, n]\!]$:

Exercice 1 — Démontrer la formule de développement selon la colonne j.

Exemple 2 *Pour s'entraîner à appliquer la formule* — Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ en développant :
a) par rapport à la première ligne **b)** par rapport à la deuxième colonne

SF 5 : Calculer un déterminant par développement suivant une rangée

Cette méthode est efficace lorsqu'une ligne ou une colonne contient beaucoup de 0.

Exemple 3 SF 5 — Calculer le déterminant suivant : $D_1 = \begin{vmatrix} 12 & 1 & -8 \\ 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Exemple 4 — On pose $u_1 = (1, 2, -1)$ et $u_2 = (-2, -1, 1)$. Déterminer une équation du sous-e.v. $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$.

■ Application 1 : déterminant de Vandermonde

• **Notation .** Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ ($n \geq 2$).

On pose $V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$

Théorème 3

• $V(a_1, \dots, a_n) =$

• $V(a_1, \dots, a_n) \neq 0$ ssi :

Exercice 2 — **1.** On suppose $a_1, \dots, a_n$ distincts.
Montrer que la fonction $P : x \mapsto V(a_1, \dots, a_n, x)$ vérifie : $P(x) = V(a_1, \dots, a_n) \times \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)$ pour tout $x \in \mathbb{C}$

2. Comment pourrait-on utiliser cette formule pour en déduire l'expression du théorème précédent ?

■ Application 2 : calculs par récurrence

Exemple 5 — Pour tout $n \geq 1$, on considère le déterminant de taille n : $D_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.
2. En déduire D_n en fonction de n pour tout $n \geq 1$.