1 Généralités

- **Rappel.** Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si :

- **Notation.** L'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est noté :
- **Remarque.** $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ est :

Théorème 1 : (Rappels)

Soient $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$ et $p \in \mathbb{N}^*$:

i) A^{-1} est inversible et :

ii) AB est inversible et :

iii) A^p est inversible et :

iv) $A^\top$ est inversible et :

Exercice 1 — Démontrer le point *iv)* sur l'inversibilité et l'inverse de la matrice transposée $A^\top$.

Exemple 1 — La matrice identité I_n est inversible et :

Exemple 2 — Montrer que la matrice nulle 0_n de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas inversible

Théorème 2

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Si l'une des colonnes de A est combinaison linéaire des autres alors :

- **Cas particliers.** A n'est pas inversible si • une colonne est nulle • deux colonnes sont identiques

Exercice 2 — Démontrer le théorème

Théorème 3 : (admis provisoirement)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

i) S'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$, alors A est inversible et $B = A^{-1}$.

ii) S'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$, alors A est inversible et $B = A^{-1}$.

SF 2 : pour montrer qu'un matrice A est inversible et trouver son inverse

Il suffit de trouver une matrice B vérifiant *UNE des deux conditions i)* ou *ii)*

2 Quelques critères d'inversibilité

Inversibilité en présence d'un *polynôme annulateur* :

Exercice 3 SF 2 — Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A vérifie $A^2 - 3A - 2I_n = 0$.
Prouver que A est inversible et déterminer son inverse.

Le cas des matrices de taille (2,2) :

Théorème 4

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible si et seulement si :

Dans ce cas :

Exercice 4 — Démontrer le théorème ci dessus.

Cas des matrices diagonales et triangulaires

Théorème 5

- Une matrice diagonale est inversible si et seulement si :
- Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si

Exercice 5 — Démontrer le premier point du théorème ci dessus.

Attention Pour les matrices triangulaires, on n'a pas d'expression « simple » pour la matrice T^{-1}.