1 Loi uniforme

Définition 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une variable aléatoire X suit *la loi uniforme sur* $[\![1,n]\!]$ et on note $X \sim \mathscr{U}([\![1,n]\!])$ si :

-
-

L'espérance et la variance de X sont alors données par :

- **Généralisation.** Soit E un ensemble fini. On dit que X *suit la loi uniforme sur* E si P_X est la probabilité uniforme sur E *i.e.* : • X est à valeurs dans E • $\forall A \in \mathscr{P}(E)$,

Situation modèle : la loi de l'équiprobabilité

- On tire *au hasard* une boule dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.
- On note X le numéro de la boule tirée, alors $X \sim \mathscr{U}([\![1,n]\!])$.

Exercice 1 — Démontrer la formule donnant $E(X)$, et calculer $V(X)$.

Exemple 1 — Un gardien possède n clés et doit ouvrir une porte dans le noir. On suppose qu'il n'utilise jamais deux fois la même clé. Combien en moyenne doit-il essayer de clés ?

Exemple 2 — Soit X_n de loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ et $f:[0,1] \to \mathbb{R}$, continue. Déterminer : $\lim\limits_{n\to+\infty} E\left(f\left(\frac{X_n}{n}\right)\right)$.

Exemple 3 — Soit $n \geq 2$ et Z de loi uniforme sur $\mathbb{U}_n$. Calculer : $E(Z)$ et $E(\arg Z)$.

2 Loi de Bernoulli

Définition 2

Soit $p \in [0,1]$. On dit qu'une variable aléatoire X suit *la loi de Bernoulli de paramètre* p et on note $X \sim \mathscr{B}(p)$ si :

-
-

L'espérance et la variance de X sont alors données par :

Situation modèle : l'indicateur de succès

On considère une expérience aléatoire à deux issues possibles : succès avec probabilité p et échec avec probabilité $1-p$. Si X est la variable aléatoire valant 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec, alors $X \sim \mathscr{B}(p)$.

- **Exemple typique.** On lance une pièce truquée donnant Pile avec probabilité p.

On note X la variable aléatoire valant 1 si l'on obtient Pile et 0 si l'on obtient Face. Alors $X \sim \mathscr{B}(p)$.

Exercice 2 — Démontrer les formules sur l'espérance et la variance.

Définition 3

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $A \subset \Omega$. L'*indicatrice de l'événement* A est la variable aléatoire $\mathbb{1}_A$

-
-

Exemple 4 — On lance n fois une dé. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on note A_i l'événement « Le i^e lancer vaut 6 ».
Que représente la variable $S_n = \mathbb{1}_{A_1} + \cdots + \mathbb{1}_{A_n}$?

Exemple 5 — Soit σ une v.a. de loi uniforme sur l'ensemble S_n des permutations de $[\![1,n]\!]$.
a) On note A_i l'événement $\{\sigma(i) = i\}$. Calculer $P(A_i)$. **b)** On note F le nombre de points fixes de σ. Calculer $E(F)$

Exemple 6 — On suppose que $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$. Montrer : $\forall m \in [\![1,n]\!]$, $E(X) \leq m - 1 + nP(X \geq m)$.

3 Loi binomiale

Définition 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. Une variable aléatoire X suit *la loi binomiale de paramètre* (n,p), noté $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, si

-
-

L'espérance et la variance de X sont alors données par :

Situation modèle : le compteur de succès

- On effectue n répétitions indépendantes d'une expérience de Bernoulli (*i.e.* deux issues possibles : succès avec probabilité p ou échec avec probabilité $1-p$.)
- Si X est la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus lors de ces n répétitions, alors $X \sim \mathscr{B}(n,p)$.

- **Exemple typique.** On lance n fois, de manière indépendante, une pièce donnant Pile avec probabilité p. On note X la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenues. Alors $X \sim \mathscr{B}(n,p)$.

Exercice 3 — **1.** Vérifier que les relations de la définition ci-dessus définissent une distribution de probabilité.
2. Démontrer la formule donnant l'espérance de la loi $\mathscr{B}(n,p)$ dans le cas où $p > 0$.