I Loi d'une variable aléatoire

- **Cadre.** On s'intéresse à une expérience aléatoire : • Ω est un univers fini. • P est une probabilité sur Ω.

1 Généralités

Définition 1

Une *variable aléatoire* sur Ω est :

- **Vocabulaire.** Lorsque $E = \mathbb{R}$ on parle de variable aléatoire réelle (v.a.r.)

Exemple 1 — On lance deux fois un dé équilibré on peut choisir pour univers $\Omega = [\![1,6]\!]^2$.
La fonction X :« somme des deux résultats obtenus » est une variable aléatoire
L'ensemble $X(\Omega)$ de toutes les valeurs prises par X est :

Exemple 2 — On lance une pièce n fois de suite. On note X la variable aléatoire égale au numéro du premier lancer qui donne pile, si l'on obtient au moins un pile, et qui vaut $n+1$ si l'on n'obtient aucun pile.

L'ensemble de toutes les valeurs prises par X est :

- **Notations.** Soit X une variable aléatoire sur Ω à valeurs dans E.
- Pour tout $A \subset E$, l'événement $X^{-1}(A)$ est noté $\{X \in A\}$: $\{X \in A\} \underset{\text{déf.}}{=}$
- Pour tout $k \in E$: $\{X = k\} \underset{\text{déf.}}{=}$ • Si $E = \mathbb{R}$: $\{X \leq k\} \underset{\text{déf.}}{=}$
- **Remarque.** Les événements $\{X = k\}$, k décrivant $X(\Omega)$, forment un : .

Exercice 1 — Pour tout $A \subset X(\Omega)$ on pose : $P_X(A) \underset{\text{déf.}}{=} P(X \in A)$. Montrer que P_X est une probabilité sur $X(\Omega)$.

2 La pratique : déterminer la loi de X

- **Vocabulaire.** Soit X une variable aléatoire sur Ω.
- La *loi de* X est la probabilité $P_X : A \mapsto P(X \in A)$ de $\mathscr{P}\big(X(\Omega)\big)$ dans $[0,1]$.
- La *distribution de probabilités de* X est la famille : $\big(P(X = k)\big)_{k \in X(\Omega)}$
- **Remarque.** La loi P_X est déterminée par la distribution de probabilités : $\forall A \in \mathscr{P}\big(X(\Omega)\big)$, $P(X \in A) = \sum_{k \in A} P(X = k)$

SF 1 : déterminer la loi de X revient à

i) *ii)*

Exemple 3 SF 1 — On lance un dé équilibré et on note X le résultat obtenu. Déterminer la loi de X.

Exemple 4 SF 1 — On lance une pièce n fois de suite. On note X la variable aléatoire égale au numéro du premier lancer qui donne pile, si l'on obtient au moins un pile, et qui vaut $n+1$ si l'on n'obtient aucun pile. On suppose que la pièce donne pile avec probabilité $p \in]0,1[$. Déterminer la loi de X

Exemple 5 SF 1 *Ex. 109.1, banque INP* — Une urne contient deux boules blanches et $n-2$ boules rouges que l'on tire une à une sans remise. On note X le rang de sortie de la première boule rouge. Déterminer la loi de X.

Stratégie à retenir avec un maximum

Exemple 6 SF 1 — On tire successivement et sans remise deux boules dans une urne de n boules numérotées de 1 à n. On note X le plus grand des deux numéros obtenu. Déterminer la loi de X.

Une astuce classique pour une variable aléatoire X à valeurs entières

Pour $k \in \mathbb{Z}$, il est parfois plus simple de calculer $P(X \leq k)$ que $P(X = k)$.

Dans ce cas on peut utiliser : $\boxed{P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k-1)}$ et plus généralement :

$\boxed{P(X = k) = P(X \geq k) - P(X \geq k+1)}$ $\boxed{P(X = k) = P(X > k-1) - P(X > k)}$ $\boxed{P(X = k) = P(X < k+1) - P(X < k)}$

Exercice 2 — Soit f une fonction définie sur $X(\Omega)$. La variable aléatoire $f \circ X$ est notée $f(X)$.

Montrer que la loi de $f(X)$ est donnée par : $\forall y \in f\big(X(\Omega)\big)$, $\boxed{P\big(f(X) = y\big) = \sum_{k \in f^{-1}(\{y\})} P(X = k)}$

- **Remarque.** Si $(p_k)_{k \in E}$ est une distribution de probabilité sur un ensemble fini E, alors il existe un espace probabilisé (Ω, P) et une variable aléatoire X sur Ω d'image E telle que pour tout $k \in E$: $P(X = k) = p_k$

Il suffit en effet de prendre : • $\Omega = E$ • P la probabilité définie pour tout $\omega \in \Omega$ par $P(\{\omega\}) = p_\omega$ • $X = \mathrm{Id}_E$.
On peut donc écrire « soit X une variable aléatoire de loi ... » sans avoir défini un espace probabilisé (Ω, P).